UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

En esta práctica estudiamos el método de Gauss de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y algunas de sus variantes. De momento hemos añadido a la clase `Matrices` el método `double[] gaussParcial(double[][] A, double[] b)` correspondiente al algoritmo de Gauss con pivote parcial para resolver el sistema $Ax = b$.

1. A partir del método `gaussParcial` construir un método `double determinanteGauss(double[][] A)` para calcular determinantes y otro `double[][] inversa(double[][] A)` para invertir matrices. Comprobar su eficacia con las matrices del ejercicio 3 de la práctica anterior.

2. Construir el método `double[] gaussTotal double[][] A, double[] b)` correspondiente al algoritmo de Gauss con pivote total.

3. Comprobar el funcionamiento de los métodos `gaussParcial` y `gaussTotal` resolviendo los sistemas siguientes y calculando la norma de los correspondientes vectores residuales $r = b - Ax$:

(a) $$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 9.3746 & 3.0416 & -2.4371 \\ 3.0416 & 6.1832 & 1.2163 \\ -2.4371 & 1.2163 & 8.4429 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.2333 \\ 8.2049 \\ 3.9339 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 0.252 & 0.36 & 0.12 \\ 0.112 & 0.16 & 0.24 \\ 0.147 & 0.21 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix} 1 & 0.01 & 0.0001 \\ 1 & 0.02 & 0.0004 \\ 1 & 0.03 & 0.009 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.99 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Considérese una placa cuadrada dividida según la cuadrícula numerada

	+	+	+	+	+	
+	0	1	2	3	4	+
+	5	6	7	8	9	+
+	10	11	12	13	14	+
+	15	16	17	18	19	+
+	20	21	22	23	24	+
	+	+	+	+	+	

Supongamos que la temperatura en las regiones marcadas por + es la siguiente: 100 en la línea horizontal superior, 50 en la línea vertical de la derecha, y 0 en la línea horizontal inferior y en la línea vertical de la izquierda. La temperatura en cada cuadrado numerado x_i, $0 \leq i \leq 24$, se supone que coincide con la media aritmética de las temperaturas de los cuatro cuadrados que tiene más próximos (los que están arriba, abajo, a la izquierda y a la derecha). Plantear un sistema de ecuaciones $Ax = b$ que tenga como solución el vector de temperaturas $x = (x_0, \ldots, x_{24})$ y resolverlo con el método de Gauss con pivote total.

NOTA: Ninguna de las matrices A o b debe definirse "a mano" en el programa.

5. Un niño, de visita en casa de su abuelo, descubre una mesa circular con veinte cajones contiguos numerados del 1 al 20 (por tanto el 12 está entre el 11 y 13, el 20 entre el 19 y el 1, etc.). Los cajones están cerrados con llave y el niño pregunta al abuelo por su contenido. Éste le responde que son los cajones donde guarda sus monedas de oro y le dice: "El número de cada cajón es el promedio de las monedas que contienen los tres de enfrente. Si aciertas cuántas monedas hay en cada cajón, son tuyas". (Así, por ejemplo, los cajones 7, 8 y 9, que son los que quedan enfrente del 18, contienen en promedio dieciocho monedas.) El niño, que es un lince para las matemáticas y siempre lleva a mano su calculadora programable, plantea un cierto sistema de ecuaciones lineales y lo resuelve numéricamente con su calculadora. A la vista del resultado le dice a su abuelo, muy enfadado, "¡Venga ya, me has tomado el pelo!", a lo que el abuelo contesta, complacido: "Tienes razón, era una broma. ¡Acepta estos diez euros como disculpa!".

Usar el método de resolución de ecuaciones lineales que se prefiera para verificar el porqué de la afirmación del niño.

6. Construir un método `int rango(double[][] A)` que devuelva el rango de una matriz (no necesariamente cuadrada) A y a partir de él otro método `boolean independencia(double[][] A)` para determinar si los vectores fila de la matriz A son linealmente independientes.

Puede demostrarse que si A es una matriz 3×7 tal que exactamente tres de sus coeficientes valen 1 y el resto se anulan, entonces la probabilidad de que sus vectores fila sean linealmente independientes es $3/19$ (¿Por qué?). Verificarlo definiendo al azar 100000 matrices con estas características y calculando el cociente $N/100000$, donde N es el número de matrices entre éstas 100000 con vectores fila linealmente independientes.

Si se desea se puede realizar una versión mejorada del ejercicio en la que no se fije de partida el número de filas $n = 3$ y el de columnas $n = 7$ de la matriz A, sino que éstos se introduzcan desde fuera, mediante ventanas. En este caso la probabilidad $P(n, m)$ de que los vectores fila de una matriz $n \times m$ con exactamente n unos y el resto de coeficientes ceros sean linealmente independientes no será $3/19$ sino que dependerá de n y m y habrá que encontrar una fórmula para calcularla. Finalmente habrá que escribir $P(n, m)$ y correspondiente cociente $N/100000$ (que serán números bastante aproximados) en una ventana emergente. (El paquete `javax.swing` proporciona dos métodos bastante sencillos para manejar ventanas, `JOptionPane.showInputDialog` y `JOptionPane.showMessageDialog`, que son los que se recomienda utilizar.)