UNIVERSIDAD
DE MURCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MÉTODOS NUMÉRICOS. PRÁCTICA 3

En esta práctica añadimos a nuestro proyecto `MetodosNumericos` el paquete `computacion.practica3`, en el que iremos introduciendo las soluciones de los ejercicios que se proponen abajo, y el paquete `auxiliar` en el que comenzamos incluyendo los ficheros `Funcion.java`, una *interface* que luego implementaremos para definir las funciones de los ejercicios, y `MetodosIterativos.java`, este último conteniendo diversos métodos iterativos para el cálculo de ceros.

1. Utilizando los métodos (a) de la bisección, (b) de la Regula Falsi modificado y (c) de Newton, aproximar la menor raíz positiva de la ecuaciones $e^{-x^2} - \cos x = 0$, la única raíz de la ecuación $\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x = 0$ y la raíz negativa de la ecuación $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 12 = 0$.

2. Los siguientes métodos iterativos pueden utilizarse para calcular $\sqrt[3]{21}$:

(a) $x_{n+1} = \frac{1}{21}\left(20x_n + \frac{21}{x_n^2}\right)$,

(b) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 21}{3x_n^2}$,

(c) $x_{n+1} = \left(\frac{21}{x_n}\right)^{1/2}$.

Elaborar un programa que escriba n iteraciones de las tres sucesiones a partir de la condición inicial x_0 y permita avanzar una clasificación de la velocidad de convergencia a la vista de los resultados.

3. El experimento de la gota de aceite de Millikan, diseñado para determinar la razón entre la carga y la masa de un electrón, se basa en la ley de Stokes

$$v = \frac{2}{9} g \frac{r^2}{n} (\mu - \mu_1) \left(1 + \frac{0.000617}{pr}\right).$$

Encontrar la razón r para un experimento en el que $v = 0.0012$, $\mu = 0.9052$, $\mu_1 = 0.0012$, $g = 980$, $n = 1.832 \times 10^{-4}$ y $p = 72$.

4. La evolución de la población de una región se ha modelizado mediante la ecuación

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t} + \frac{NE}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

donde P_0 es la población inicial, NE es la tasa de inmigración a esta región y λ es una constante. Escribir un programa que proporcione la población del próximo año $P(2)$ teniendo como datos de entrada $P_0 = P(0)$ la población del año pasado, $P(1)$ la población al cabo de este año y NE la tasa de inmigración este año (asumiendo que la tasa de inmigración se mantendrá un año más). Calcular la estimación suponiendo que $P_0 = 1000000$, que la población al cabo de un año es 1564000 y que el número de inmigrantes este año ha sido $NE = 435000$.

5. El polinomio de cuarto grado $p(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$ tiene dos raíces reales, una en $[-1, 0]$ y la otra en $[0, 1]$. Se trata de aproximar estos ceros con una precisión de 6 dígitos con los métodos (a) de la bisección (b) de la Regula Falsi y (c) de Newton. Úsense los extremos iniciales como aproximaciones iniciales en (5a) y (5b) y el punto medio en (5c).

6. Comprobar numéricamente, usando el método de Steffensen para el cálculo del cero de $f(x) = \cos x - x$, que el orden de convergencia del método es 2. Para ello se procederá según el esquema siguiente:

- A partir de una condición inicial adecuada aproximamos el cero de la función con una precisión de 10^{-16} y guardamos el valor obtenido en la variable `cero`.
- Con la misma condición inicial construimos un bucle en el que, mientras $|x_n - \mathtt{cero}| > 10^{-16}$, se calcule la iteration x_{n+1} y se impriman los valores de n, x_n, x_{n+1} y el cociente $\frac{|x_{n+1} - \mathtt{cero}|}{|x_n - \mathtt{cero}|^2}$.

7. Implementar el método de la secante (algoritmo 2.4 del libro de Burden y Faires) en `MetodosIterativos` y comprobar para la función $f(x)$ del ejercicio anterior (siguiendo un mecanismo similar) que el orden de convergencia del método es $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8. La suma de dos números es 222. Si a cada número se le agrega su raíz cuadrada, el producto de estas dos sumas es 14701. Determinar los dos números con la mayor precisión posible.

9. Si $f(x)$ es una función con un cero múltiple en $x = c$, entonces la función $F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ tiene un cero simple en $x = c$. El método de Newton aplicado a $F(x)$ proporciona una variante del método de Newton para ceros múltiples (los detalles pueden consultarse en el libro de Burden y Faires) que habremos de implementar en un método `newtonMultiple` de estructura análoga al método `newton` y que, como éste, guardaremos en la clase `MetodosIterativos`. La diferencia estriba en que este método, a diferencia del anterior, también usa la derivada segunda de la función. Por tanto en lugar de una variable `Funcion f` requerirá una variable `FuncionC2 f` (donde `FuncionC2.java` es una *interface* que extiende a la *interface* `Funcion.java`, que incluiremos como ésta en el paquete `auxiliar`, y que además de los métodos `eval` y `derivada` contiene el método `derivada2`).

Escribir una clase ejecutable `Ejercicio9.java` en la que se aplicarán `newton` y `newtonMultiple` a la función $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}^2 x - x^3$ (que guardaremos en una clase `FuncionC2Ej9.java` que implemente a la *interface* `FuncionC2`) para obtener sus dos ceros $c_1 = 0$ (que es múltiple) y c_2. (¿Por qué tiene exactamente dos ceros?) Comprobar a la manera descrita en el ejercicio 6 que para el primer cero tenemos convergencia lineal y cuadrática respectivamente, y que para el segundo cero la convergencia es cuadrática en ambos casos. Proponer una explicación de estos hechos añadiendo los pertinentes comentarios a la clase.

10. Hallar todos los ceros de la función $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + 6x - 27/4$ con un error menor que 10^{-10}.