ANEXO AL EJERCICIO 5 DE LA PRÁCTICA 2

El objetivo del ejercicio 5 de la práctica 2 es diseñar un método numérico eficiente para calcular el seno de un número. La idea es bien sencilla: aprovechar que el desarrollo en serie de potencias del seno

$$\operatorname{sen} x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$ y estimar $\operatorname{sen} x$ sumando un número suficiente de términos de la serie.

Una primera dificultad que aparece es que, aunque la serie siempre converge, si x es relativamente grande entonces los primeros términos de la serie pueden crecer mucho, generándose importantes errores de redondeo. Por tanto, lo primero que habremos de hacer es reemplazar x por un número más pequeño y con el mismo seno. Concretamente, si definimos $y = x - 2\pi[(x+\pi)/(2\pi)]$ (donde $[u]$ es la parte entera de u) entonces $\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x$ y

$$\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] \leq \frac{x+\pi}{2\pi} < \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + 1,$$

$$2\pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] \leq x+\pi < 2\pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + 2\pi,$$

con lo que $y \in [-\pi, \pi)$. De hecho, reemplazando si es necesario y por su suplementario $\pi - y$ (cuando $y > \pi/2$) o por su suplementario $-\pi - y$ (cuando $y < -\pi/2$), podemos conseguir que $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Ni siquiera en esta situación y es óptimo, pues puede ocurrir que $|y| > 1$. Esto hace que los numeradores en la serie de potencias para $\operatorname{sen} y$ crezcan, lo que disminuye ligeramente su rapidez de convergencia. Así pues, es aconsejable reemplazar y por $z = y/2$ cuando y no pertenezca al intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$. En este caso $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{sen} y$ son diferentes pero ambos pueden relacionarse de manera sencilla:

$$1 - \cos y = 1 - \cos 2z = 2\operatorname{sen}^2 z,$$
$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 z,$$

y finalmente

$$\operatorname{sen} y = \pm\sqrt{1 - (1 - 2\operatorname{sen}^2 z)^2}$$

con el signo dependiendo de si $y > 0$ o $y < 0$.

Llegados a este punto, se trata de estimar con qué precisión el método `seno(z,n)` de la aplicación `Ejercicio5.java`, que calcula la suma

$$S_n(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} z^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

de los n primeros términos de la serie de potencias que define a $\operatorname{sen} z$ cuando $|z| \leq \pi/4$, aproxima a $\operatorname{sen} z$. Un detalle que no debemos pasar por alto es que `seno(z,n)` y $S_n(z)$ no son iguales pues `seno(z,n)` trabaja con números de la máquina y ello implica inevitables errores de redondeo. De acuerdo con lo visto en las clases teóricas, es razonable esperar que

$$\left|\frac{S_n(z) - \texttt{seno(z,n)}}{S_n(z)}\right| \leq \epsilon\,\mathrm{Op}(n),$$

donde

$$\epsilon = 1{,}1102230246\ldots \cdot 10^{-16}$$

es el épsilon de la máquina y $\mathrm{Op}(n)$ es el número de operaciones que conllevan errores de redondeo en el método `seno(z,n)`. Ahora se tiene lo siguiente:

Teorema. *Supongamos que* $0 < |z| \leq 1$. *Entonces, supuesta cierta la desigualdad*

$$\left|\frac{S_n(z) - \texttt{seno(z,n)}}{S_n(z)}\right| \leq \epsilon\,\mathrm{Op}(n),$$

se tiene

$$\left|\frac{\operatorname{sen} z - \texttt{seno(z,n)}}{\operatorname{sen} z}\right| < 5 \cdot 10^{-n}$$

para cada $1 \leq n \leq 14$.

Demostración. Tenemos

$$\left|\frac{\operatorname{sen} z - \texttt{seno(z,n)}}{\operatorname{sen} z}\right| \leq \left|\frac{\operatorname{sen} z - S_n(z)}{\operatorname{sen} z}\right| + \left|\frac{S_n(z) - \texttt{seno(z,n)}}{\operatorname{sen} z}\right| =: A + B. \tag{1}$$

Estimemos A. Dado que $S_n(z)$ es el desarrollo de MacLaurin de $\operatorname{sen} z$ de orden $2n$, tenemos que

$$\operatorname{sen} z - S_n(z) = \frac{(-1)^n \theta_z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para un cierto θ_z que cumple $|\theta_z| \leq |z|$. Dado que

$$\operatorname{sen} z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} z^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

para todo z, se tendrá que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} z^{2i-2}}{(2i-1)!}$$

siempre que $z \neq 0$. Dado que la serie de potencias de la derecha es alternada (comenzando con un término positivo) y la sucesión de los valores absolutos de sus términos es estrictamente decreciente siempre que $|z| \leq 1$, tendremos que

$$1 - \frac{z^2}{3!} < \frac{\operatorname{sen} z}{z} < 1$$

para cada z tal que $0 < |z| \leq 1$. En particular, $|\operatorname{sen} z| > 5|z|/6$. Por tanto

$$A = \left|\frac{\operatorname{sen} z - S_n(z)}{\operatorname{sen} z}\right| < \frac{|z|^{2n+1}/(2n+1)!}{5|z|/6} = \frac{6|z|^{2n}}{5 \cdot (2n+1)!} \leq \frac{6}{5 \cdot (2n+1)!}$$

para cada $0 < |z| \leq 1$. Por otra parte, es sencillo demostrar por inducción que

$$\frac{6}{5 \cdot (2n+1)!} \leq 2 \cdot 10^{-n}. \tag{2}$$

para todo $n \geq 1$. En consecuencia

$$A < 2 \cdot 10^{-n}. \tag{3}$$

Estimemos B. Podemos escribir

$$\begin{aligned} B &= \left|\frac{S_n(z) - \texttt{seno(z,n)}}{\operatorname{sen} z}\right| = \left|\frac{S_n(z) - \texttt{seno(z,n)}}{S_n(z)}\right| \left|\frac{S_n(z)}{\operatorname{sen} z}\right| \\ &= \left|\frac{S_n(z) - \texttt{seno(z,n)}}{S_n(z)}\right| \left|\frac{S_n(z) - \operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z}\right| \leq \left|\frac{S_n(z) - \texttt{seno(z,n)}}{S_n(z)}\right| (1 + A). \end{aligned}$$

De acuerdo con la hipótesis,

$$\left|\frac{S_n(z) - \texttt{seno(z,n)}}{S_n(z)}\right| \leq \epsilon \operatorname{Op}(n).$$

En nuestro caso el total de operaciones $\operatorname{Op}(n)$ es $1 + 5(n-1)$ (contamos $5(n-1)$ operaciones por dos multiplicaciones, dos divisiones y una suma realizadas $n-1$ veces, y otra más por la asignación de valor a z). Así pues, si $1 \leq n \leq 14$ entonces

$$B < 2 \cdot 10^{-16} \cdot 5n \cdot (1 + 2 \cdot 10^{-n}) < 300 \cdot 10^{-16} = 3 \cdot 10^{-14} \leq 3 \cdot 10^{-n}. \tag{4}$$

El teorema se sigue de (1), (3) y (4). $\square$

El teorema anterior demuestra que basta usar $n = 13$ para que `seno(z,n)` aproxime a z con 13 cifras significativas, es decir para que el error relativo $|\operatorname{sen} z - \texttt{seno(z,n)}|/|\operatorname{sen} z|$ sea inferior a $5 \cdot 10^{-13}$. En realidad esta estimación es bastante conservadora. Por ejemplo puede verificarse por cálculo directo que $\frac{6}{5 \cdot 17!} \leq 2 \cdot 10^{-13}$ y por tanto bastaría tomar $n = 8$ (compárese con (2)). Obsérvese también que ya estamos muy cerca del máximo de cifras significativas que podemos obtener, que viene limitado por el épsilon de la máquina.