Funciones vectoriales.

En este resumen escribiremos todo en el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$.
Una función vectorial es una función que transforma un número real en un vector:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{definida como} \quad F(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones reales de variable real.
Así, se dice que F es continua, derivable o integrable, si lo son x, y y z; esto es:

$$F'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad \text{y} \quad \int_a^b F(t)dt = \left(\int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt \right)$$

Algunas reglas de derivación de estas funciones relacionadas con las operaciones entre vectores son las siguientes (suponemos que F y G son dos funciones vectoriales, u es una función real y $\lambda \in \mathbb{R}$):

1. $(F(t) + G(t))' = F'(t) + G'(t)$.
2. $(\lambda F(t))' = \lambda F'(t)$.
3. $(u(t)F(t))' = u'(t)F(t) + u(t)F'(t)$.
4. $(F(t) \cdot G(t))' = F(t) \cdot G'(t) + F'(t) \cdot G(t)$.
5. $(F(t) \times G(t))' = F(t) \times G'(t) + F'(t) \times G(t)$.
6. $(F \circ u)'(t) = (F(u(t)))' = F'(u(t))u'(t)$.

Cuando una función vectorial es diferenciable, se puede identificar con una curva diferenciable. Al vector $F(t)$ se le llama vector de posición de la curva y, si $F'(t) \neq 0$, el vector $F'(t)$ es el vector tangente a la curva en el punto $F(t)$; a dicho vector se le llama también vector velocidad y la velocidad en el instante t es $\|F'(t)\|$.
De modo similar $F''(t)$ es el vector aceleración y $\|F''(t)\|$ es la aceleración.
Se llama vector tangente unitario T al vector $T(t) = \dfrac{F'(t)}{\|F'(t)\|}$.

Longitud de un arco de curva en $\mathbb{R}^3$.

La longitud de un arco de curva en $\mathbb{R}^3$, entre dos puntos $F(a)$ y $F(b)$ viene dada por la fórmula

$$L(F, a, b) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

Curvatura.

Dada una curva $F(t)$ definida en un intervalo $a \leq t \leq b$, se define el parámetro longitud de arco $s(t)$ como la longitud del arco de curva entre $F(a)$ y $F(t)$. Se puede reparametrizar la curva en función del parámetro longitud de arco s. Se define la curvatura κ de un curva como la derivada del vector tangente unitario respecto al parámetro longitud de arco:

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$$

Esta definición es bastante intuitiva, puesto de mide como varía el vector tangente respecto de la longitud del arco de curva. Sin embargo no es fácil de calcular; no obstante se puede obtener la siguiente expresión más fácil de manejar:

$$\kappa = \frac{\|T'(t)\|}{\|F'(t)\|}.$$

El vector $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$, es un vector unitario en la dirección de $T'(t)$ y se llama vector normal principal unitario.