# Tema 2: Variables Aleatorias

José G. Clavel[1]

[1]Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
jjgarvel@um.es
Universidad de Murcia

6 de octubre de 2009

- 2.1. Introducción.
- 2.2. Variable aleatoria (v.a.).
- 2.3. Función acumulada de distribución (FADi).
- 2.4. Función de densidad (FDe).
- 2.5. Esperanzas y momentos:
    - a) media, $\mu$;
    - b) varianza, $\sigma^2$;
    - c) Valor esperado de una función de v.a.
    - d) Desigualdad de Chevyshev;
    - e) Función Generatriz de Momentos;
    - f) Cuantiles y mediana.

### Definición 2.1.

Dado un **espacio probabilístico** $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$, llamamos **variable aleatoria**, que notaremos por $X$, a una función que tiene su dominio en $\Omega$ y su imagen en la recta real. Matemáticamente, la función ha de ser tal que para cualquier $r$, exista un conjunto de sucesos $A_r$ definidos $A_r = \{\omega : X(\omega) \leq r\}$ que pertenecen a $\mathcal{A}$

Se llama **espacio probabilístico** a la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$, donde:

- $\Omega$ es el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio
- $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\Omega$ que cumple las condiciones para ser un *álgebra*
- y $P(\cdot)$ es una función de probabilidad que verifica los axiomas de Kolmogorov

Decimos que un subconjunto de sucesos $\mathcal{A}$ forma un **álgebra** (o un álgebra de Boole) si verifica:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. si $A_1$ y $A_2 \in \mathcal{A}$, entonces $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

### Ejemplo 2.1.

Sea el experimento lanzar una moneda. Definimos la variable $X$ como:

$$X = \{\text{Número de Caras}\}$$

¿Es $X$ una variable aleatoria?

## Ejemplo 2.2.

Sea el experimento lanzar 2 monedas. Definimos la variable $X$ como:

$$X = \{\text{Número de cruces obtenidas al lanzar dos monedas}\}$$

¿Qué valores tomaría la v.a.?

| Sucesos | | Función | | Valores de la variable aleatoria |
|---|---|---|---|---|
| $A_1 = (FC)$ | | Variable aleatoria | | $X(A_1) = X(FC) = 1$ |
| $A_2 = (CF)$ | $\rightarrow$ | $X(A_i)$ | $\rightarrow$ | $X(A_2) = X(CF) = 1$ |
| $A_3 = (CC)$ | | Número de cruces | | $X(A_3) = X(CC) = 2$ |
| $A_4 = (FF)$ | | | | $X(A_4) = X(FF) = 0$ |

### Definición 2.2.

Llamaremos FADi, que notaremos por $F_x(\cdot)$ o simplemente $F(x)$ a la función con dominio en la recta real y con imagen en el intervalo $[0, 1]$ que satisface:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

para cada número real $x$

## Ejemplo 2.3.

Suponiendo que la moneda del ejemplo anterior no esté trucada, ¿cuál sería la FADi de la v.a. $X$ definida:

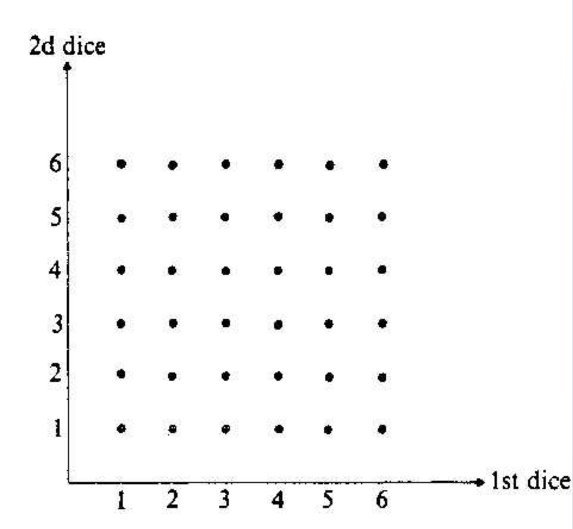
$$X = \{\text{Número de caras obtenidas al lanzar una moneda}\}$$

### Ejemplo 2.4.

Considere el experimento de lanzar dos dados. Sea $Y$ la v.a. definida:

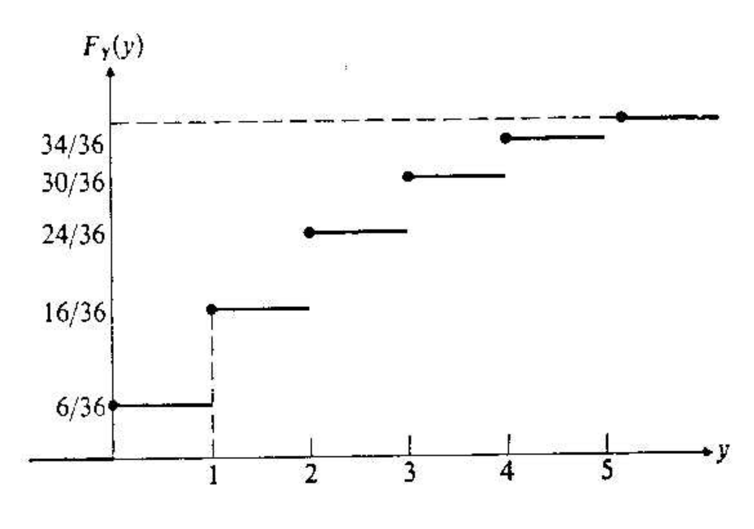
$$Y = \{\text{Diferencia absoluta de la puntuación obtenida}\}$$

Represente su función acumulada de distribución


2d dice
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
1st dice

# De dados ya dados

1. A dice is a small cube which has between one and six spots or numbers on its sides, and which is used in games to provide random numbers.
   - *In old-fashioned English*, 'dice' was used only as a plural form, and the singular was die, but now 'dice' is used as both the singular and the plural form.
2. If you dice food, you cut it into small cubes. Dice the onion...


$F_Y(y)$
34/36
30/36
24/36
16/36
6/36
1
2
3
4
5
y

Propiedades de la función acumulada de distribución:

1. $F_x(-\infty) \equiv \lim_{x\to-\infty} F_x(x) = 0$ y
   $F_x(\infty) \equiv \lim_{x\to\infty} F_x(x) = 1$
2. $F_x(\cdot)$ es una función monótona NO decreciente:
   $F_x(a) \leq F_x(b)$ para $a < b$
3. $F_x(\cdot)$ es continua a la derecha de cada punto

1. variables aleatorias discretas (FDe $=$ función de cuantía)
2. variables aleatorias continuas

# Para una v.a. discreta

## Definición 2.3.

Llamaremos FDe, que notaremos por $f_x(\cdot)$ o simplemente $f(x)$ a cualquier función con dominio en la recta real y con imagen en el intervalo $[0,1]$ que satisface:

1. $f(x_j) > 0;\ j = 1, 2, 3, \ldots$
2. $f(x) = 0; x \neq x_j;\ j = 0, 1, 2, \ldots$
3. $\sum f(x_j) = 1;\ j = 0, 1, 2, \ldots$

# Para una v.a. continua

## Definición 2.4.

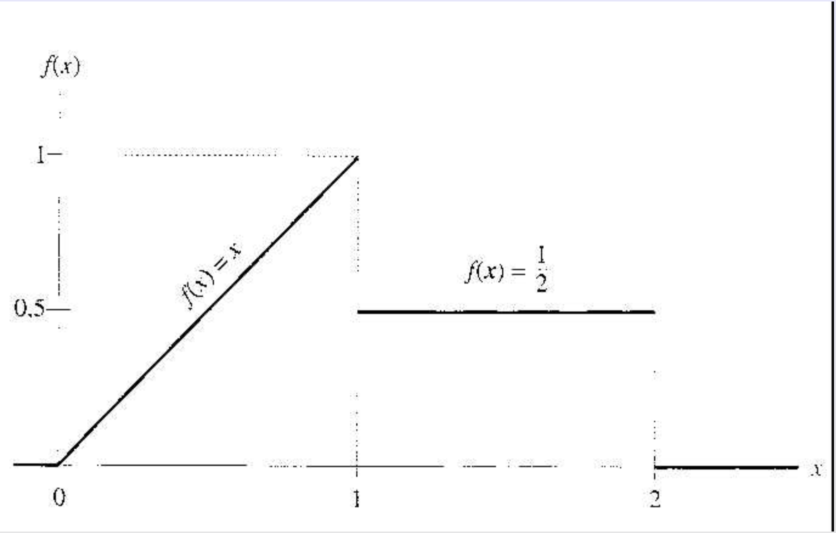
Una v.a. se dice que es continua si existe una función, que notaremos por $f_x(\cdot)$ o simplemente $f(x)$, que satisface:

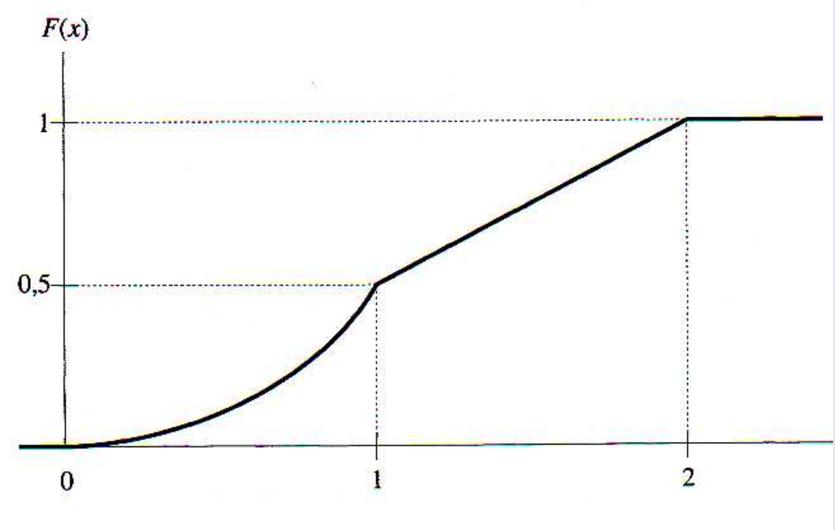
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)du$$

A esa función $f_x(\cdot)$ o simplemente $f(x)$, la llamaremos **función de densidad** de X

### Ejemplo 2.5.

Una estación de servicio tiene un depósito de gasolina sin plomo de 2.000 litros lleno al comienzo de cada semana. La demanda semanal muestra un comportamiento creciente hasta llegar a 1.000 litros, y después se mantiene entre 1.000 y 2.000 litros. Si designamos por X la variable aleatoria que indica la demanda semanal, en miles de litros, de gasolina sin plomo, ¿cuál sería la expresión de su función de densidad? ¿Y su función de distribución?


$f(x)$
1
0,5
$f(x) = x$
$f(x) = \frac{1}{2}$
0
1
2
$x$


F(x)
1
0,5
0
1
2

Propiedades de la función densidad de una **v.a. discreta**:

1. $f(x_j) \geq 0$; para j=1, 2, ...
2. $f(x_j) = 0$; para j $\neq$1, 2, ...
3. $\sum f(x_j) = 1$; para j=1, 2, ...

Propiedades de la función densidad de una **v.a. continua**:

1. $f(x) \geq 0$; para todo x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

- momentos ordinarios (o respecto al origen) de orden $r$: $a_r$
- momentos centrales (o respecto a la media) de orden $r$: $m_r$

El operador esperanza: $E[\cdot]$

para v.a. discreta:

$$E[X] = \mu_X = \mu = \sum x_i P(X = xi)$$

para v.a. continua:

$$E[X] = \mu_X = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

para v.a. discreta:

$$E[(X-\mu)^2] = \sigma_X^2 = \sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 P(X = xi)$$

para v.a. continua:

$$E[(X-\mu)^2] = \sigma_X^2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

para v.a. discreta:

$$E[g(X)] = \sum g(x_i)P(X = xi)$$

para v.a. continua:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

# Pafnuty Lvovich Chebyshev (Russian: 1821–1894)

AKA

- Chebychev,
- Chebyshov,
- Tchebycheff,
- Tschebyscheff

- Sea $X$ una v.a. y sea $g(\cdot)$ una función no negativa con dominio en la recta real; entonces

$$P[g(X) \geq k] \leq \frac{E[g(x)]}{k}$$

para cualquier $k > 0$

- **corolario:** si $X$ tiene varianza finita,

$$P[|X - \mu_x| \geq r\sigma_x] \leq \frac{1}{r^2}$$

para cualquier $k > 0$

$$P[(X - \mu_x)^2 \geq r^2\sigma_x^2] \leq \frac{1}{r^2}$$

para cualquier $k > 0$

- **variaciones** varias: si $X$ tiene varianza finita,

$$P[|X - \mu_x| \geq r\sigma_x] \leq \frac{1}{r^2}$$

para cualquier $k > 0$. Esto es equivalente a:

$$P[|X - \mu_x| \leq r\sigma_x] \geq 1 - \frac{1}{r^2}$$

Y también a:

$$P[\mu_x - r\sigma_x < X < \mu_x + r\sigma_x] \geq 1 - \frac{1}{r^2}$$

Por ejemplo, si $r = 2$, entonces

$$P[\mu_x - 2\sigma_x < X < \mu_x + 2\sigma_x] \geq 0{,}75$$

## Ejemplo 2.6.

Observadas la serie de ventas mensuales de coches de una determinada marca se deduce que el número medio de coches vendidos al mes es de 120 con una desviación típica de 10, y no se conoce su distribución de probabilidad de las ventas mensuales. Obtener:

1. La probabilidad de que las ventas mensuales estén comprendidas entre 100 y 140 coches.
2. El menor intervalo de tal manera que al menos el 95 % de las ventas mensuales estén en ese intervalo.

Estadística Descriptiva

- momentos ordinarios (o respecto al origen) de orden $r$: $a_r$
- momentos centrales (o respecto a la media) de orden $r$: $m_r$

Estadística Aplicada:

- momentos ordinarios de orden $r$: $\alpha_r = E[X^r]$
- momentos centrales de orden $r$: $\mu_r = E[(X - \mu_x)^r]$

**Definición 2.5.**

Función Generatriz de Momentos:

$$\phi_x(t) = E[e^{tx}]$$

## Definición 2.6.

Llamamos cuantil q-ésimo de una v.a. X al menor valor $C_q$ que verifica

$$F_x(C_q) \geq q$$

para valores de $q$ que verifican: $0 \geq q \geq 1$

- Si la v.a. es continua entonces:

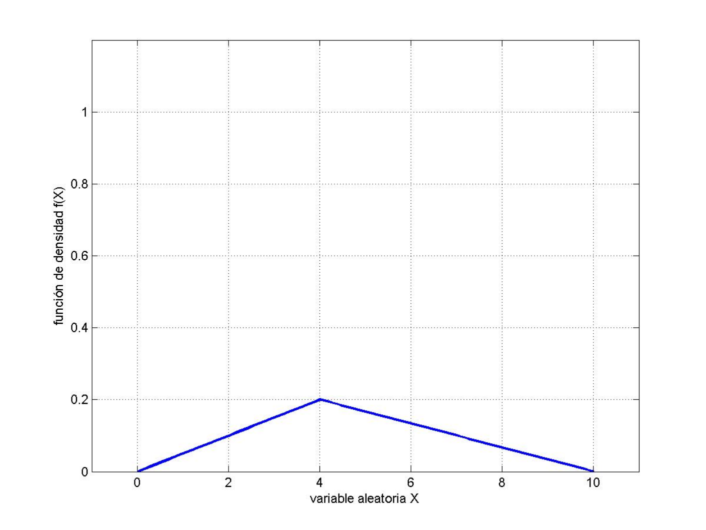
$$F_x(C_q) = q$$

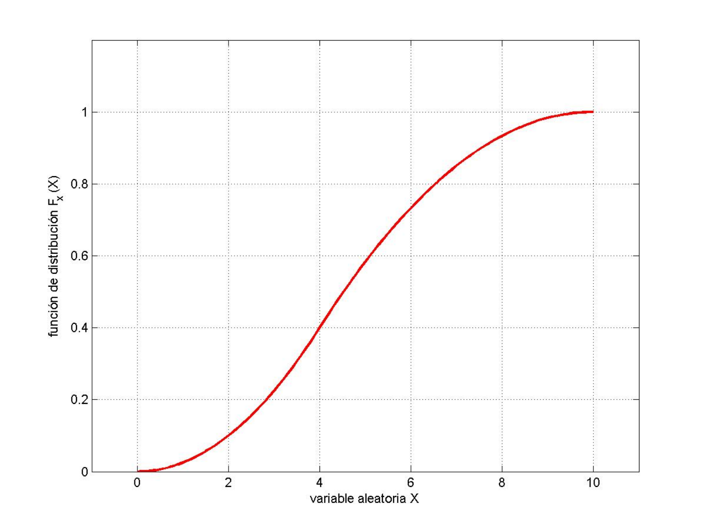
## Ejemplo 2.7.

Las calificaciones de las recientes oposiciones al Servicio Murciano de Salud se distribuyen según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{20} & 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{10-x}{30} & 4 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se quiere eliminar, para la siguiente prueba, al 20 % de los presentados. ¿Cuál es la nota de corte?


función de densidad f(X)
variable aleatoria X
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
2
4
6
8
10


función de distribución $F_x(X)$
variable aleatoria X
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
2
4
6
8
10