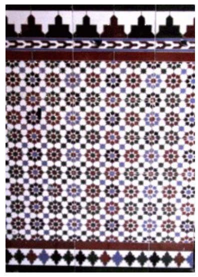
IV Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, diciembre 2005

Equipo:

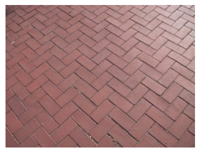
Mosaicos regulares y semirregulares

Es muy frecuente encontrar motivos geométricos decorando multitud de objetos: vasijas, muros, suelos, etc. Nosotros nos vamos a centrar en los que decoran suelos y paredes, los **mosaicos**.



Un mosaico es un recubrimiento del plano mediante unas determinadas piezas, que se denominan **teselas**, de forma que no se superpongan ni dejen huecos.

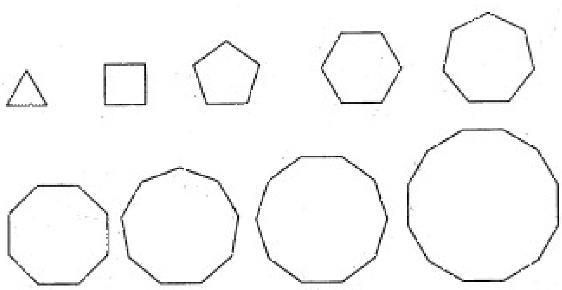
Existen una gran variedad de mosaicos según el tipo de tesela empleada. Los que a nosotros nos interesan ahora son los que utilizan como teselas únicamente polígonos regulares.



Mosaicos Regulares

Un **mosaico regular** es aquél en el que las teselas son todas un mismo polígono regular y están unidas haciendo coincidir vértices y lados.

Si queremos que las teselas no se superpongan ni dejen huecos los ángulos de los polígonos que concurren en cada vértice han de sumar 360°, por lo que para estudiar los posibles mosaicos será conveniente completar la siguiente tabla con los ángulos interiores de diferentes polígonos regulares:



núm. de lados :	3	4	5	6	7	8	9	10	12
ángulo interior:	60°				$180(\frac{5}{7})°$		140°	144°	150°

Teniendo en cuenta que en cada vértice concurren tres o más polígonos, **¿con qué polígonos regulares podemos formar un mosaico regular? ¿Podríais dibujar un trozo de dichos mosaicos?**

Mosaicos Semirregulares

Los mosaicos que están formados por dos o más polígonos regulares de forma que en cada vértice concurren los mismos polígonos y de la misma forma se denominan mosaicos semirregulares.
Existen 8 tipos de mosaicos semirregulares.

¿Sois capaces de dibujar un mosaico semirregular que esté formado únicamente por triángulos equiláteros y exágonos?

¿Y por triángulos equiláteros y cuadrados?

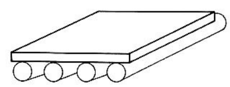
IV Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, diciembre 2005

Equipo:

Figuras de anchura constante

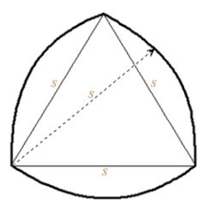
La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo que es el centro. Ésta es la razón por la que las ruedas son circulares, como todos los radios son de la misma longitud, el eje está siempre a la misma distancia del suelo (el radio de la circunferencia).

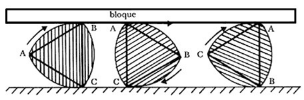
Además de ser usado como rueda, la circunferencia puede ser usada como rodillo y probablemente fuese el primer uso que se le dio; si colocamos un objeto sobre rodillos circulares, al rodar éstos, el objeto se traslada sin subir ni bajar, siempre a la misma altura sobre el suelo (el diámetro de la circunferencia).



Pero existen rodillos no circulares que, sorprendentemente, funcionan como los rodillos circulares. En efecto, si queremos que un rodillo produzca el mismo resultado que un rodillo circular, bastará que la anchura de su sección sea siempre la misma; es decir que su sección tenga anchura constante.

Una de las figuras de anchura constante es el triángulo de Reuleaux, que debe su nombre a Franz Reuleaux (1829-1905), y que se construye a partir de un triángulo equilátero de lado s, trazando los tres arcos de radio s centrados en cada uno de los vértices y que pasan por los otros dos vértices.





como su anchura es constante (igual al lado del triángulo) es una de las figuras que puede utilizarse para hacer rodillos.

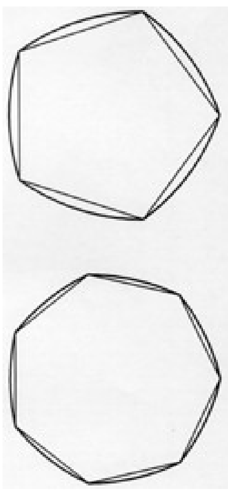
¿Cuál es el perímetro de un triángulo de Reuleaux construido a partir de un triángulo equilátero de lado d?

Si lo habéis calculado bien, podréis ver la semejanza que hay entre dicho perímetro y el perímetro de la circunferencia, que es una figura de anchura constante igual a su diámetro. Ambos son casos particulares de un resultado matemático, denominado teorema de Barbier por Joseph Emile Barbier (1839-1889), que establece cuál es el perímetro de una figura que tiene anchura constante igual a d. ¿Qué crees que dice ese teorema?

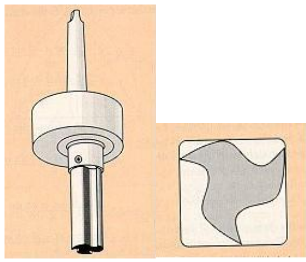
¿Qué área tiene el triángulo de Reuleaux construido a partir de un triángulo equilátero de lado d?

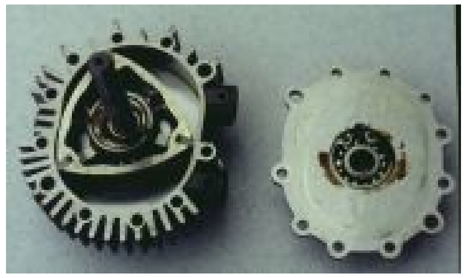
Comentario final

Igual que se construye una figura de anchura constante a partir de un triángulo equilátero, puede construirse a partir de otros polígonos regulares como el pentágono o el heptágono. De hecho, en el Reino Unido existen unas monedas con esa forma construidas a partir del heptágono, las de veinte y cincuenta peniques. El hecho de que estas monedas tengan anchura constante es conveniente pues, siendo así, al introducirlas en una máquina expendedora el sensor de la máquina puede detectar el tipo de moneda de que se trata independientemente de la posición por la que pasen por ese detector, lo que no ocurriría si la anchura dependiera de la posición como, por ejemplo, si las monedas fuesen cuadradas.



El triángulo de Reuleaux puede utilizarse también para hacer taladros que hagan agujeros cuadrados y en algunos mecanismos como el motor de Wankel o los proyectores de cine.





También se pueden construir figuras de anchura constante a partir de cualquier triángulo, aunque el método es algo más complejo que el utilizado para el triángulo equilátero.

IV Gymkhana Matemática

Facultad de Matemáticas

Murcia, diciembre 2005

Equipo:

Volúmenes

Observad los cilindros A y B. Indicar cuál de las siguientes posibilidades creéis que es la correcta:

1) **El cilindro A tiene más volumen que el cilindro B.**

2) **El cilindro B tiene más volumen que el cilindro A.**

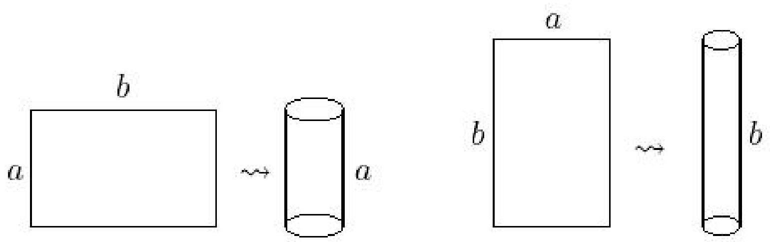
3) **Los dos cilindros tienen el mismo volumen.**

Comunicad vuestra respuesta a los monitores de sala.

Ahora poned los cilindros sobre los platos, llenad uno con arroz y verted ese arroz en el otro. ¿Cuál creéis ahora que tiene más volumen?

Cortad el celo que cierra los cilindros y comprobad que los rectángulos de cartulina son iguales. Vamos a hacer "la teoría" de esta práctica:

Partimos de dos rectángulos de lados $a < b$, y formamos con ellos los cilindros de alturas a y b, como muestra la figura.



¿Cuál es el volumen de cada uno? ¿Qué volumen es mayor?

IV Gymkhana Matemática

Facultad de Matemáticas

Murcia, diciembre 2005

Equipo:

Dígitos de control

Probablemente todos vosotros tenéis Documento Nacional de Identidad (DNI), cuyo número, también denominado número de identificación fiscal (NIF) termina con una letra. ¿Os habéis preguntado alguna vez el por qué de esa letra y cómo se calcula?

Esa letra es lo que se denomina un dígito de control y la utilización de dígitos de este tipo es mucho más frecuente de lo que nos podemos imaginar. Están presentes, por ejemplo, en los 20 dígitos de la cuenta bancaria en la que habéis tenido que pagar el seguro escolar o la cuota de algún viaje de estudios o en el ISBN (International Standard Book Number, registro internacional de libros editados) de los libros. Su misión es favorecer la correcta transmisión de la información. Vamos a trabajar con algunos de ellos.

DNI

La letra que aparece en el DNI es simplemente el resultado de calcular el resto que da el número al dividirlo entre 23 y aplicar la tabla siguiente:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

Así, como el resto que resulta de dividir 10.000.000 entre 23 es 14, la letra correspondiente al DNI número 10000000 será Z y el NIF completo será 10000000 Z

¿Qué NIF completo corresponde al DNI número 23463058?

Los dígitos de control sirven para detectar algunos errores en la transmisión de datos. Por ejemplo, ¿será correcto el NIF 23463059 E?

Aunque no sirven para detectar todos los errores, sí que se pueden utilizar para

corregir errores de un determinado tipo. En concreto, podemos corregir errores de un dígito siempre que sepamos el lugar que ocupa dicho dígito; por ejemplo, si sabemos que la letra del NIF anterior es correcta y que el error está en el último dígito del número, ¿cuál sería el DNI correcto?

ISBN

El ISBN es un número que sirve para identificar cualquier libro editado; por eso algunos centros de enseñanza lo indican cuando dan los libros de texto de cada curso. Por ejemplo, el ISBN de *"El diablo de los números"* **de la editorial** *Siruela* **es** $84 - 7844 - 374 - 6$.

El ISBN está regulado por un organismo internacional y consta de 10 **dígitos divididos en cuatro bloques:**

- **El primer bloque corresponde al país o la zona geográfica. El de España es el 84.**
- **El segundo bloque es un indicativo de la editorial. 7844 es el de la editorial** *Siruela*.
- **El tercer bloque se refiere al libro dentro de la editorial. 374 para** *"El diablo de los números"*.
- **El cuarto bloque es un código de control.**

El dígito de control se calcula de la siguiente manera: Si los dígitos correspondientes a los tres primeros bloques son $abcdefghi$ **el dígito de control es el resto que resulta de dividir entre** 11 **el número**

$$1 \times a + 2 \times b + 3 \times c + 4 \times d + 5 \times e + 6 \times f + 7 \times g + 8 \times h + 9 \times i$$

teniendo en cuenta que si el resto obtenido es 10 **como dígito de control se pone** X, **10 en números romanos. Así, el código de control de** *"El diablo de los números"* **es el resto que resulta de dividir entre** 11 **el número**

$$1\times8+2\times4+3\times7+4\times8+5\times4+6\times4+7\times3+8\times7+9\times4 = 8+8+21+32+20+24+21+56+36 = 226$$

que es efectivamente 6. **¿Os habéis fijado que** $6 = 6 - 2 + 2$**? ¿Conocéis la forma de calcular el resto de la división por** 11 **que consiste en sumar las unidades, restar las decenas, sumar las centenas, restar las unidades de millar, etc.?**

Al igual que con el DNI, el dígito de control del ISBN sirve para detectar algunos errores e incluso permite corregir algunos de ellos muy concretos. Si nos dicen que el ISBN de la *"Ortografía de la Lengua Española" de la Real Academia Española es* $84 - 239 - 925? - 0$, ***¿podemos conocer el dígito que falta?***

IV Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, diciembre 2005

Equipo:

Estrategias ganadoras

Vamos a analizar estrategias ganadoras en algunos tipos de juegos.

El juego de "llegar a 10" es para dos jugadores y funciona así:

Se empieza con un papel en el que hay escrito un 0. Los jugadores A y B van jugando alternativamente (empieza el jugador A) y cada uno, en su turno, puede sumar 1 ó 2 al último número escrito en el papel, anotando el resultado. Gana el jugador que llegue a 10.

El juego admite algunas variantes, que iremos considerando en las siguientes preguntas:

- **¿Tiene algún jugador una estrategia ganadora? ¿Cuál es esa estrategia?**

- *Supongamos ahora que el juego consiste en llegar a 15.* **¿Tiene algún jugador una estrategia ganadora? ¿Cuál es esa estrategia?**

- **¿Para qué valores de n tiene el jugador A una estrategia ganadora en el juego de "llegar a n"? ¿Para qué valores la tiene el jugador B?**

Supongamos que se empieza también con el 0 y hay que llegar a 50, pero cada jugador en esta ocasión puede sumar en su turno 1, 2 ó 3 al último número escrito. **¿Tiene algún jugador una estrategia ganadora? ¿Cuál es?**

IV Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, diciembre 2005

Prueba intermedia 1

Equipo:

Si diciembre tiene 4 domingos, el día de navidad NO puede caer en:

1. *Miércoles.*
2. *Jueves.*
3. *viernes.*
4. *Sábado.*
5. *Domingo.*

IV Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, diciembre 2005

Prueba intermedia 2

Equipo:

Augustus De Morgan, matemático que sólo vivió en el siglo XIX, al ser preguntado por su edad respondió: "Yo cumplí x años en el año x^2". ¿En qué año nació?

1. *1802.*
2. *1806.*
3. *1811.*
4. *1831.*
5. *1834.*

IV Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, diciembre 2005

Prueba intermedia 3

Equipo:

Se lanzan dos dados, uno verde y otro amarillo. ¿Cuál es la probabilidad de que el verde gane al amarillo?

1. *1/2.*
2. *1/6.*
3. *5/12.*
4. *5/6.*
5. *1/3.*

IV Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, diciembre 2005

Prueba intermedia 4

Equipo:

Completa la siguiente pirámide numérica sabiendo que cada número es la suma de los dos que tiene debajo:

$$\begin{array}{ccccc} & & 411 & & \\ & \ldots & & \ldots & \\ 110 & & \ldots & & 115 \end{array}$$

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Equipo:

Códigos de Hamming

Debido al funcionamiento de los ordenadores, en las modernas aplicaciones tecnológicas (televisores, discos compactos, telefonía, etc.) para representar los datos se utilizan **códigos binarios**, basados en el uso de "palabras" formadas exclusivamente por ceros (0) y unos (1).

En los procesos de almacenamiento, transmisión o procesamiento de estos datos se producen errores y es necesario disponer de sistemas que permitan detectar y corregir dichos errores, los denominados **códigos correctores de errores**. Estos códigos están basados en introducir determinada información adicional que permita la detección y corrección de los errores producidos.

Entre los códigos correctores de errores se encuentran los denominados **códigos de Hamming** en honor a R.W. Hamming que los diseñó en 1950. Estos códigos están basados en la introducción de **bits de paridad** que nos indican si hay un número par o impar de unos (1) en determinadas posiciones.

Los códigos de Hamming sirven para detectar dos errores y para corregir un error.

Por ejemplo, un mensaje binario de cuatro dígitos 0110 se transforma en uno de siete dígitos $d_1d_20d_4110$ introduciendo tres nuevos dígitos d_1, d_2 y d_4 en las posiciones que se corresponden con las potencias de 2 (1, 2, 4, ...) de la siguiente forma:

- d_1 será un 1 o un cero para asegurar que haya un número par de unos en las posiciones 1, 3, 5 y 7 (un lugar sí, un lugar no, empezando en el primer dígito).
- d_2 será un 1 o un cero para asegurar que haya un número par de unos en las posiciones 2, 3, 6 y 7 (dos lugares sí, dos lugares no, empezando en el segundo dígito).
- d_4 será un 1 o un cero para asegurar que haya un número par de unos en las posiciones 4, 5, 6 y 7 (cuatro lugares sí, cuatro lugares no, empezando en el cuarto dígito).

En nuestro ejemplo, d_1 sería un 1, d_2 sería un 1 y d_4 sería un 0, por lo que nuestro nuevo mensaje será 1100110. A este proceso se le llama **codificación**.

Codifica el mensaje 1110

¿Es 0111011 un mensaje codificado correctamente?

Los dígitos d_1, d_2 y d_4 sirven para detectar los errores que se hayan producido en la transmisión del mensaje. Así, si la paridad de las posiciones 1, 3, 5 y 7 no es la correcta uno de estos dígitos será erróneo; si la paridad de las posiciones 2, 3, 6 y 7 no es correcta uno de estos dígitos será incorrecto y lo mismo puede decirse acerca de la paridad de los posiciones 4, 5, 6 y 7.

De esta manera, si el mensaje recibido tiene un dígito incorrecto, comprobando la paridad en los tres casos anteriores podemos detectar cuál es el dígito erróneo y corregirlo, obteniendo así el mensaje correcto; para ello basta determinar cuál es la única posición que afecta a los dígitos de paridad incorrectos.

¿Qué dígito de paridad falla en el mensaje 0111011 anterior?

¿Se puede cambiar algún dígito para que sea correcto? ¿Cuál?

Si se recibe el mensaje codificado 1011011, ¿ha habido algún error en la transmisión? ¿Qué mensaje binario de cuatro dígitos se ha codificado para obtener el mensaje recibido?

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Equipo:

Dados y probabilidad

Suponed que tiramos a la vez dos dados de colores distintos, verde y amarillo:

¿Cuántos resultados distintos pueden darse teniendo en cuenta el color de los dados? ¿Cuáles son?

¿Cuántos resultados pueden darse para la suma de ambas puntuaciones? ¿Cuáles son?

¿Cuál o cuáles de esos resultados posibles para la suma es más probable que el resto? ¿Cuál es su probabilidad?

¿Cuál o cuáles de esos resultados posibles para la suma es menos probable que el resto? ¿Cuál es su probabilidad?

De los resultados posibles para la suma, ¿cuántos son pares y cuántos son impares?

¿Qué es más probable, que la suma sea par o que sea impar?

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Equipo:

Formas y envases

Uno de los recipientes más comunes en nuestros supermercados son los denominados **Tetra Brik**.

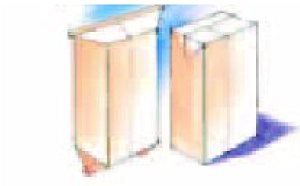
El tetra brik es un prisma recto de base rectangular elaborado en un material ligero a partir de diversas capas de cartón (que le proporciona rigidez), aluminio (que evita que la luz y el oxígeno penetren en el envase) y polietileno (que asegura la estanqueidad). Dada la combinación de materiales, una vez utilizado debe depositarse en los contenedores amarillos destinados a los envases.
Su forma permite unas aceptables condiciones de empaquetado y almacenamiento.

Se puede fabricar a partir de rollos del correspondiente material tras un proceso de doblado, una unión lateral, otra superior y otra inferior.

Si se desea fabricar con un litro de capacidad y se establece que tenga una base cuadrada de 6 cm de lado, determinar, en cm, qué altura debe tener indicándola como fracción y en su expresión decimal.

Resolver la misma cuestión si, para facilitar su manipulación, se quiere que tenga una base rectangular de 6 cm $\times$ 9 cm.

Si se empaquetan en cajas de 6 unidades colocadas verticalmente, ¿qué dimensiones pueden tener dichas cajas?



Es posible que hayas observado que, tras ser usados, estos envases se pueden plegar dejándolos planos y ocupando poco espacio.

Si se supone que cada una de las tres uniones (lateral, superior e inferior) tiene 1 cm de anchura, ¿cuál de los dos modelos de envases indicados requiere menos material para su fabricación?

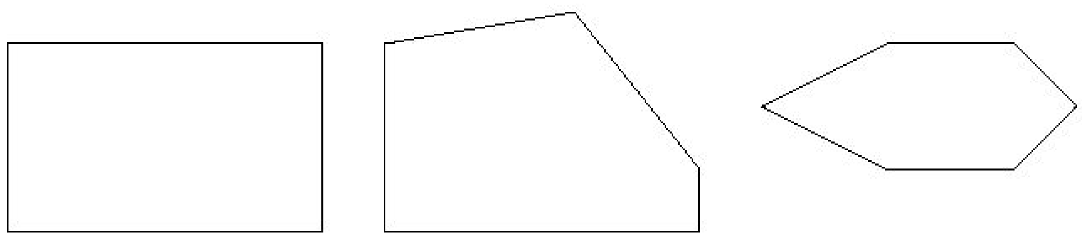
V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Equipo:

El problema de la galería de arte

Una forma de tener garantizada la vigilancia en una galería de arte es situar cámaras de seguridad en los rincones o las esquinas de la galería de forma que al girar puedan captar, entre todas las que se instalen, cualquier punto de la zona de exposición. Además, para abaratar los costes, las galerías intentarán instalar el menor número posible de cámaras.

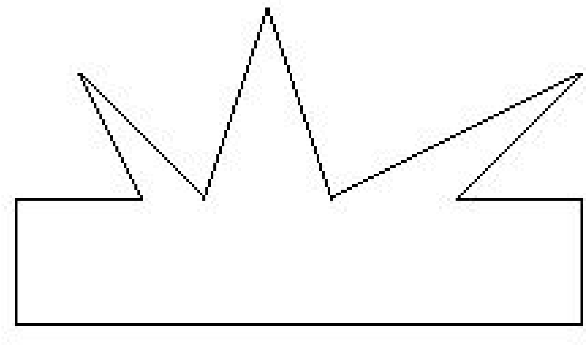
A): A continuación se indican la planta de algunas galerías de arte. ¿Cuántas cámaras se necesitan en cada una de ellas para cubrir la vigilancia?



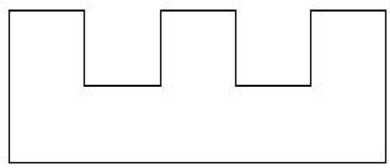
Una figura se dice que es **convexa** si el segmento que une cualquier par de puntos que estén en el interior de la figura está también todo él incluido dentro de la figura. La planta de todas estas galerías es convexa.

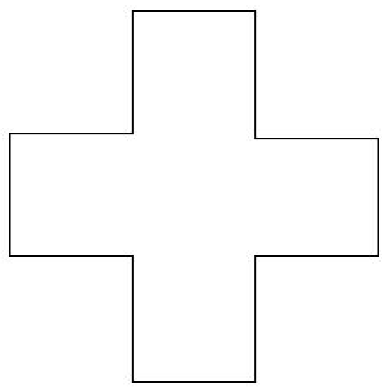
B: ¿Qué se puede decir acerca del número de cámaras necesario para cubrir la vigilancia de una galería con planta convexa y de su posible ubicación?

C: ¿Es posible cubrir la vigilancia de la siguiente galería únicamente con dos cámaras? ¿Dónde estarían situadas?



D: Encontrar el número mínimo de cámaras necesarias para cada una de las siguientes galerías marcando las esquinas en las que estarían situadas.





E: ¿Cómo se ven afectadas las soluciones obtenidas si además de situar las cámaras en los rincones o las esquinas de la sala se pueden ubicar en las paredes?

V Gymkhana Matemática

Facultad de Matemáticas

Murcia, noviembre 2006

Equipo:

Cuadrados latinos y sudokus

Un **cuadrado latino** de tamaño N es una cuadrícula $N \times N$ (o sea, con N filas y N columnas) en la que los números $1, 2, 3, \ldots, N$ aparecen exactamente una vez en cada fila y en cada columna. Por ejemplo, el siguiente es un cuadrado latino de tamaño 5:

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

Un cuadrado latino de tamaño N es **reducido** cuando su primera fila (leída hacia la derecha) y su primera columna (leída hacia abajo) contienen los números $1, 2, 3, \ldots, N$ en ese orden.

Escribe todos los cuadrados latinos reducidos de tamaño 3 distintos que puedas:

1	2	3
2		
3		

1	2	3
2		
3		

1	2	3
2		
3		

1	2	3
2		
3		

Escribe todos los cuadrados latinos reducidos de tamaño 4 distintos que puedas:

1	2	3	4
2			
3			
4			

1	2	3	4
2			
3			
4			

1	2	3	4
2			
3			
4			

1	2	3	4
2			
3			
4			

1	2	3	4
2			
3			
4			

1	2	3	4
2			
3			
4			

1	2	3	4
2			
3			
4			

1	2	3	4
2			
3			
4			

Un **sudoku** de tamaño 4 es un cuadrado latino de tamaño 4 en el que además cada uno de los cuadrados 2×2 enmarcados por lineas más gruesas contiene exactamente una vez los números 1, 2, 3 y 4.

Completa el siguiente sudoku:

1		4	
			1
2		3	
	3		

Completa todos los sudokus que puedas en los que el primer cuadrado 2×2 **es**

1	2
3	4

:

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

1	2		
3	4		

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Prueba intermedia 1

Equipo:

Juan nació antes del año 2000. El 25 de Agosto del 2001 cumplió tantos años como es la suma de los dígitos del año de su nacimiento.

Determina su fecha de nacimiento.

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Prueba intermedia 1

Equipo:

Juan nació antes del año 2000. El 25 de Agosto del 2001 cumplió tantos años como es la suma de los dígitos del año de su nacimiento.

Determina su fecha de nacimiento.

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Prueba intermedia 2

Equipo:

Un club está formado por 10 niñas, cuyas edades son todas distintas y van de los 4 a los 13 años. Tiene la particularidad de que las niñas son hermanas dos a dos. Las sumas de las edades de las parejas de hermanas son 10, 13, 17, 22 y 23 años respectivamente. Clara, que tiene 7 años, es una de las componentes del club. Determina, razonadamente, la edad de su hermana.

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Prueba intermedia 2

Equipo:

Un club está formado por 10 niñas, cuyas edades son todas distintas y van de los 4 a los 13 años. Tiene la particularidad de que las niñas son hermanas dos a dos. Las sumas de las edades de las parejas de hermanas son 10, 13, 17, 22 y 23 años respectivamente. Clara, que tiene 7 años, es una de las componentes del club. Determina, razonadamente, la edad de su hermana.

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Prueba intermedia 3

Equipo:

Antonio, Begoña, Carlos y Diana han tomado un aperitivo en un bar. A la hora de pagar, lo hacen a partes iguales. Una vez abonada la cantidad, observan que aunque todos han pagado lo mismo, Antonio ha puesto el 10'% de lo que tenía al principio, Begoña el 20'%, Carlos el 30'% y Diana el 40'%.

Averigua razonadamente la cantidad mínima de euros que tenía cada uno, sabiendo que al principio todos ellos tenían un número entero de euros (sin decimales).

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Prueba intermedia 3

Equipo:

Antonio, Begoña, Carlos y Diana han tomado un aperitivo en un bar. A la hora de pagar, lo hacen a partes iguales. Una vez abonada la cantidad, observan que aunque todos han pagado lo mismo, Antonio ha puesto el 10'% de lo que tenía al principio, Begoña el 20'%, Carlos el 30'% y Diana el 40'%.

Averigua razonadamente la cantidad mínima de euros que tenía cada uno, sabiendo que al principio todos ellos tenían un número entero de euros (sin decimales).

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Prueba intermedia 4

Equipo:

En una fiesta hay 15 mujeres y algunos hombres. Primero cada mujer le regala un bombón a cada hombre conocido, que se lo come inmediatamente. Después cada hombre le regala un bombón a cada mujer desconocida. En total se regalan 240 bombones.

Con esta información, ¿se puede determinar el número de hombres que hay en la fiesta?

V Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, noviembre 2006

Prueba intermedia 4

Equipo:

En una fiesta hay 15 mujeres y algunos hombres. Primero cada mujer le regala un bombón a cada hombre conocido, que se lo come inmediatamente. Después cada hombre le regala un bombón a cada mujer desconocida. En total se regalan 240 bombones.

Con esta información, ¿se puede determinar el número de hombres que hay en la fiesta?

VI Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2008

Equipo:

Poliedros

Si suponemos que la aristas de los cubos que se han proporcionado tienen longitud 1, construid con ellos poliedros que tengan el volumen y el área que se indican en la tabla. Una vez construido cada uno de los poliedros, presentadlo a los monitores para su comprobación.

Volumen	Área	comprobación
7	26	
10	50	
12	32	
18	46	
18	50	
20	48	
22	58	

Si pensáis que alguna de las propuestas no se pueden construir escribid “no se puede” en la columna de comprobación.

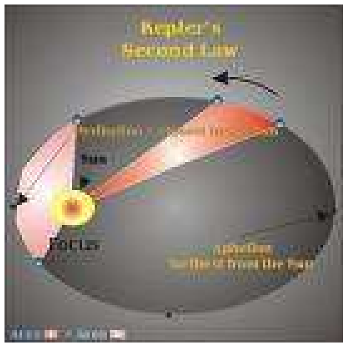
VI Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2008

Equipo:

Elipses

Johannes Kepler (1571-1630) encontró que los movimientos de los planetas se rigen por leyes matemáticas. La primera de sus leyes establece que los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.

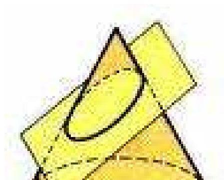
Pero, ¿qué es una elipse y qué es un foco de una elipse?



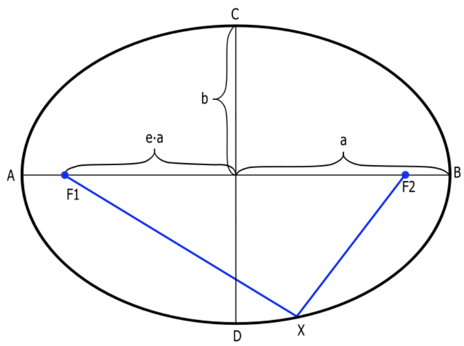
Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos, Q, del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos F_1 y F_2 (denominados **focos**) es una longitud constante ℓ.

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = \ell$$

Si se corta una superficie cónica por planos que son perpendiculares a su eje se obtienen circunferencias. Si en lugar de cortarla por planos perpendiculares al eje se corta por planos oblicuos que, además, corten a todas las generatrices del cono, entonces se obtienen elipses.



Los elementos característicos de la elipse aparecen reflejados en la siguiente imagen:

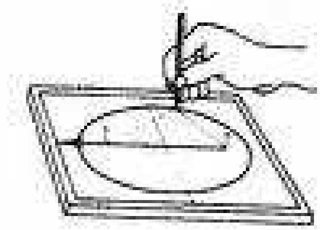


Los ejes de una elipse son perpendiculares entre sí y la elipse es simétrica con respecto a cualquiera de ellos. El punto O en el que se cortan los ejes se denomina **centro** de la elipse y ésta es simétrica respecto a su centro.

¿Qué relación hay entre la longitud del eje mayor AB y la suma ℓ de la distancia de un punto Q de la elipse a los focos F_1 y F_2?

Se llama **distancia focal** de una elipse a la distancia entre los dos focos de la elipse. ¿Existe alguna relación entre la distancia focal y las longitudes de sus dos ejes?

Para construir una elipse podemos utilizar el denominado método del jardinero: se fijan los extremos de una cuerda de longitud ℓ a dos puntos (los focos) y manteniendo la cuerda siempre tensa se traza la curva según se indica en el dibujo:



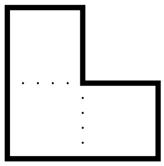
Basándoos en los datos anteriores, y utilizando la cuerda, trazad sobre el papel proporcionado una elipse cuyo eje mayor mida 100 cm. y cuyo eje menor mida 80 cm. y trazad otra cuyo eje mayor mida 65 cm. y cuyo eje menor mida 60 cm.

VI Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2008

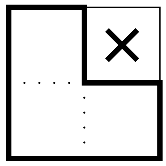
Equipo:

Enlosados inductivos

Suponed que disponemos de unas piezas (podemos pensar que son losas) en forma de L que se obtienen juntando tres cuadrados de lado 1, como la de la izquierda en la siguiente figura:



una losa



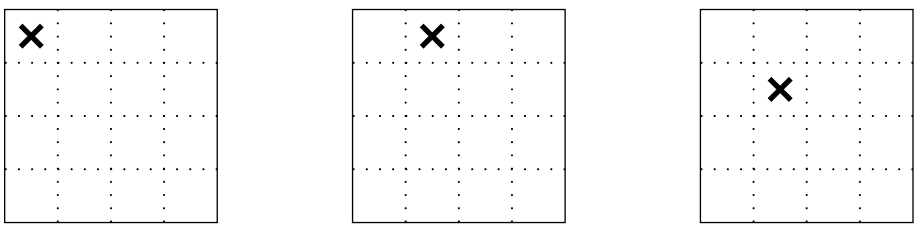
un enlosado muy sencillo

Con estas piezas queremos rellenar (o enlosar) unos rectángulos cuadriculados respetando estas condiciones:

- Las piezas no se pueden romper ni solapar, y sus lados deben estar sobre la cuadrícula.
- Se debe dejar sin enlosar (para un desagüe) un determinado cuadro de la cuadrícula.

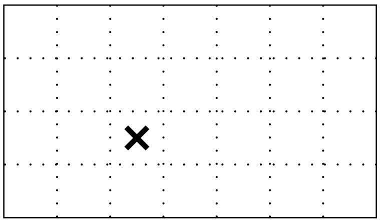
Si el rectángulo es de tamaño 2×2 la solución es bien sencilla (figura de la derecha) y tendríamos soluciones análogas si el desagüe estuviera en cualquier otra casilla.

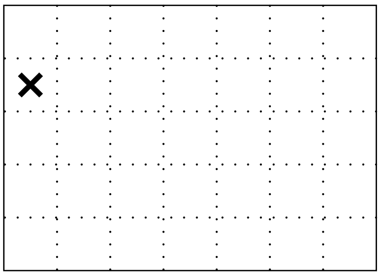
Resolved el problema para los siguientes rectángulos de tamaño 4×4, dejando en cada caso sin cubrir la casilla señalada con la cruz. Marca la solución claramente con el rotulador.

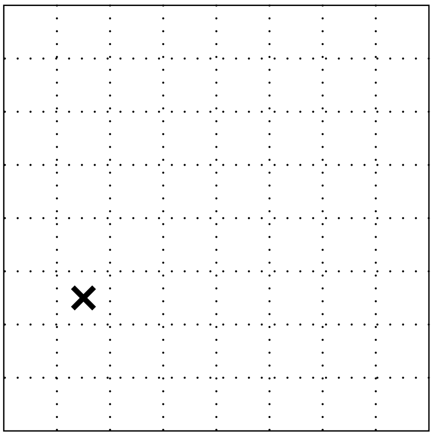


Para un rectángulo 4×4, ¿habrá alguna forma poner la cruz en cierta casilla que haga imposible resolver el problema? Justificad la respuesta.

Resolved el mismo problema de enlosados en los casos siguientes (si en alguno afirmáis que es imposible, explicad por qué):







Existe una técnica matemática muy útil, la “demostración por inducción”, que aplicada a este problema permite encontrar con cierta facilidad una solución cuando los rectángulos por enlosar son cuadrados de tamaño $2^n \times 2^n$. Por si sirve de pista, diremos sólo que este método de inducción se basa en resolver un caso inicial (generalmente sencillo) y en ver cómo cada caso puede resolverse “en función del anterior”.

VI Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2008

Equipo:

Mensajes secretos: El método RSA

¿Qué restos se obtienen al dividir entre 5 los números 2^4, 3^4 y 4^4?

¿Y qué restos se obtienen al dividir entre 5 los números 2^5, 3^5 y 4^5?

Estos resultados son casos particulares de un resultado publicado (sin demostración) en 1640 por el matemático francés Pierre Fermat que establece que **si p es un número primo y a es un número que no es divisible por p, entonces a^{p-1} da resto 1 al dividirlo entre p** y, por tanto, a^p da el mismo resto que a al dividirlo entre p.

Un siglo después Leonard Euler dio la primera demostración de este resultado y, en 1760, estableció un resultado más general sobre los restos que resultan al dividir potencias por un número aunque no fuese primo.
Según este resultado de Euler, si $n = p \times q$, donde p y q son dos números primos distintos, y a es un número primo con n (que no tiene factores comunes con él), entonces el resto que resulta de dividir la potencia $a^{(p-1)\times(q-1)}$ entre n es precisamente 1.

Cuando queremos mandarle un mensaje a alguien, transmitirle una determinada información, hay ocasiones en las que nos interesa que nadie más pueda conocerlo, es decir, que los datos sean secretos. El proceso de disfrazar los datos se llama **cifrado**. El acceso a los ordenadores está controlado por **contraseñas** que se almacenan cifradas para que nadie pueda tener fácil acceso a ellas.

Ron Rivest, Adi Shamir y Len Adelman diseñaron a mediados de los años setenta un método (denominado **RSA**) que permite a cualquier persona que quiera recibir un mensaje secreto hacer pública la forma de cifrar los mensajes porque únicamente podrá descifrarlos la persona que los recibe (este tipo de cifrados se denominan de **clave pública**).

El método RSA se basa en el resultado de Euler junto con el hecho de que mientras que es muy fácil multiplicar dos números es mucho más difícil factorizar un número en producto de primos. Funciona de la siguiente manera:

Se eligen dos números primos, por ejemplo $p = 5$ y $q = 23$ (en la práctica se utilizan primos muchísimo más grandes), se calcula $n = p \times q$ (en nuestro ejemplo sería $n = 115$) y se toman un número r que no tenga factores comunes con el mínimo común múltiplo m de $p-1$ y $q-1$ y un número s de forma que $r \times s$ de resto 1 al dividirlo entre m. En nuestro caso, como $m = m.c.m.(4, 22) = 44$, podrían ser $r = 5$ y $s = 9$ ya que $5 \times 9 = 45$ que da resto 1 al dividirlo entre 44. De esta forma si a es un número que no es divisible por p ni por q se tendrá que $a^{rs} = (a^r)^s$ da el mismo resto que a al dividirlo entre n.

La persona que quiera recibir los mensajes cifrados puede anunciar públicamente que para enviarle un determinado número a bastará con que se le envíe el resto que da a^r al dividirlo entre n. Los números n y r estarán al alcance de todos, mientras que la forma de descodificar el mensaje cifrado recibido b, que será calcular el resto que resulta de dividir b^s entre n, sólo la sabrá él y quien sea capaz de factorizar n en primos.

En resumen, en nuestro caso, para cifrar un número x bastará que calculemos el resto que da x^5 al dividirlo entre 115 y para descifrar un número cifrado y bastará que calculemos el resto que da y^9 al dividirlo entre 115.

Si nos dicen que para cifrar un número ha de ser $n = 115$ y $r = 5$ y queremos enviar el número 11, ¿Qué número cifrado deberemos enviar?

Si hemos recibido los números cifrados 3 y 7 ¿Qué números sin cifrar han querido enviarnos?

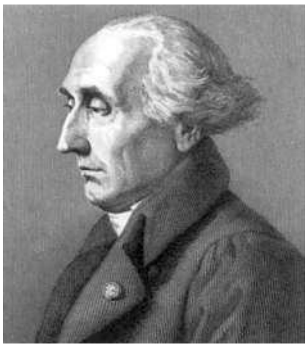
VI Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2008

Equipo:

Sumas de cuadrados

En el siglo III, Diofanto de Alejandría afirmó que todo número entero positivo se puede expresar como una suma de cuadrados con 4 sumandos como máximo. Por ejemplo:

$2 = 1^2 + 1^2$	$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$
$4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2$	$5 = 1^2 + 2^2$
$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$	$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$



Esta afirmación es cierta, aunque hubo que esperar hasta 1770 para que Joseph Louis Lagrange diera una demostración rigurosa.

Como ves en los ejemplos anteriores, a menudo basta con menos de 4 sumandos y a veces hay más de una forma de obtener esas sumas de cuadrados.

En 1798, Adrien-Marie Legendre identificó los enteros positivos que no se pueden escribir como suma de cuadrados con menos de 4 sumandos: son los de la forma $4^n(8k+7)$ con $n, k \geq 0$. Para $n = 0$ aparecen los miembros de la progresión aritmética

$$7, \quad 15, \quad 23, \quad 31, \quad 39, \quad 47, \quad \ldots$$

PREGUNTA 1 (sumas de DOS cuadrados):

Para cada uno de los siguientes números primos, decide si puede o no expresarse como suma de DOS cuadrados. Completa la tabla siguiendo el ejemplo de las dos primeras filas.

nº primo	¿es posible expresarlo como $a^2 + b^2$? ¿cómo?
5	sí es posible: $5 = 1^2 + 2^2$
7	no es posible
11	
13	
17	
19	
23	
41	
61	
97	

PREGUNTA 2 (sumas de CUATRO cuadrados):

Cada uno de los siguientes números se puede expresar como suma de CUATRO cuadrados de dos maneras distintas. Encuentra las que puedas y completa la tabla como en el ejemplo.

Atención: dos sumas que sólo se diferencien en el orden de los sumandos no se consideran distintas. Por ejemplo, $10^2 + 2^2 + 4^4 + 2^2$ no sería distinta de la de la segunda ejemplo.

número	forma 1	forma 2
124	$1^2 + 1^2 + 1^2 + 121^2$	$2^2 + 2^2 + 4^4 + 10^2$
28		
60		
92		

VI Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2008

Equipo:

Prueba intermedia 1

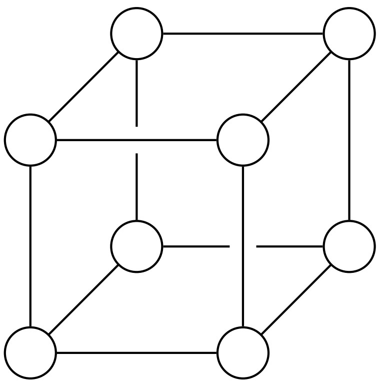
En una reunión la edad media global es de 31 años, la de los hombres es 35 y la de las mujeres es 25. ¿Cuál es la relación hombres / mujeres?

VI Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2008

Equipo:

Prueba intermedia 2

Sitúa los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 en los vértices de un cubo para que la suma en cada arista sea un número primo.

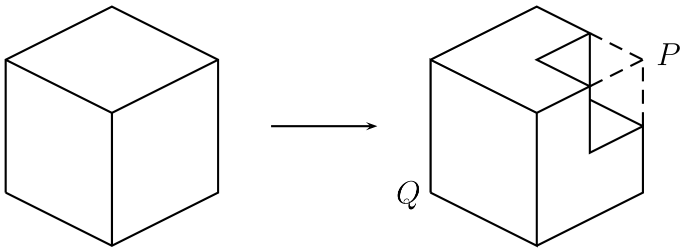


VI Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2008

Equipo:

Prueba intermedia 3

A un cubo de lado 2 le hemos extraído un cubo de lado 1 como se ve en la figura. Si P es el punto donde estaba el vértice que hemos quitado y Q es el vértice opuesto, dibuja la figura que veríamos desde P si mirásemos en dirección a Q.

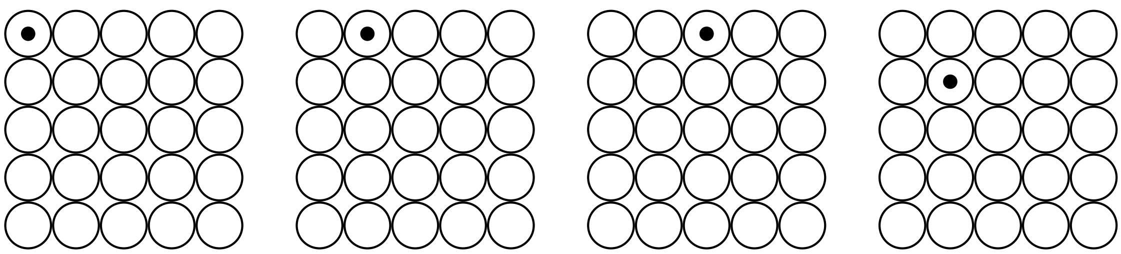


VI Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2008

Equipo:

Prueba intermedia 4

Saliendo en cada caso desde el círculo marcado y moviéndote de un círculo a otro sólo por sus puntos de tangencia (o sea, sólo en horizontal y vertical, sin diagonales), señala un recorrido que pase por todos los círculos sin repetir. Si no se puede, marca la casilla correspondiente.



☐ es imposible ☐ es imposible ☐ es imposible ☐ es imposible

VII Gymkhana Matemática

Facultad de Matemáticas

Murcia, abril 2009

Equipo:

Faros y hélices

Un determinado pueblecito costero tiene un faro cuya planta es un cuadrado de 5 m de lado y con una altura de 9 m.

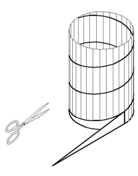
El farero no quiere pintar el faro con franjas horizontales como viene siendo habitual sino que, imitando la "Torre de Hércules" de La Coruña, pretende pintarle una linea negra que partiendo de la parte inferior de una esquina llegue a la parte superior de la misma esquina dando dos vueltas completas al faro siempre con la misma inclinación.

Torre de Hércules

¿Qué altura deberá ir ganando la línea al recorrer cada una de la cuatro fachadas de la torre?

¿Cuánto medirá la línea en su totalidad?

El farero de un pueblo vecino pretende hacer lo mismo, pero su faro es de planta circular con 12 m de perímetro y 20 metros de altura. Si pretende que la línea dé exactamente cuatro vueltas alrededor de la torre, ¿cuánto ha de medir la línea que debe pintar?



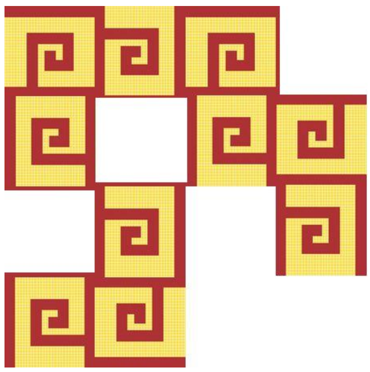
Si en un cilindro de cartón pintamos una línea análoga a la del faro y cortamos con una tijeras a lo largo de ella, ¿qué figura nos saldría? ¿Cuáles serían sus dimensiones?

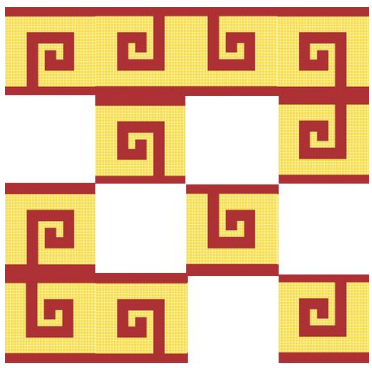
VII Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2009

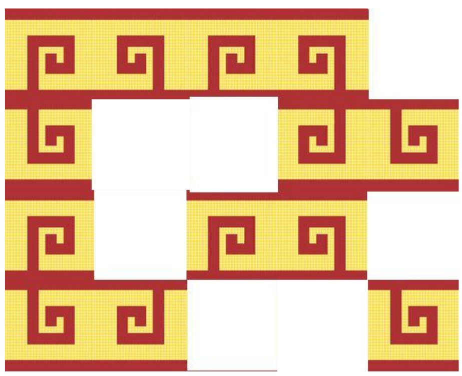
Equipo:

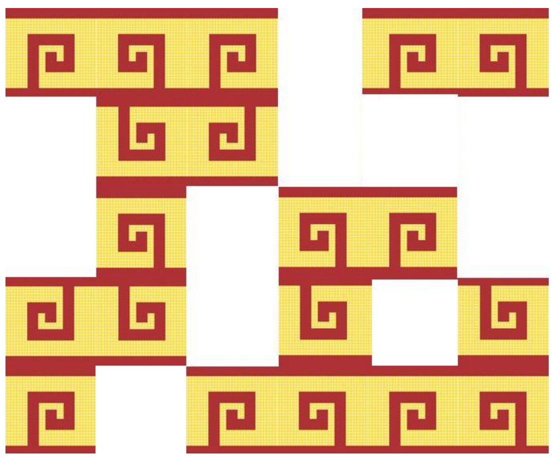
Restauración arqueológica

En las ruinas de una casa romana se han encontrado cuatro mosaicos diferentes que, lamentablemente, están incompletos:

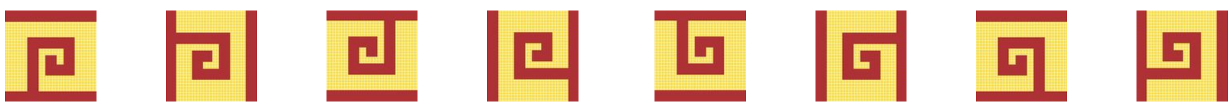








Intenta restaurarlos indicando, mediante su letra, cuál de las siguientes piezas pondrías en cada uno de los huecos.



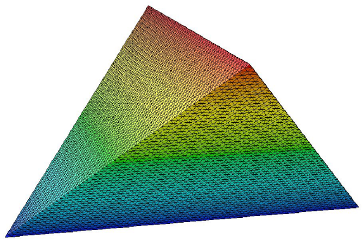
A B C D E F G H

VII Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2009

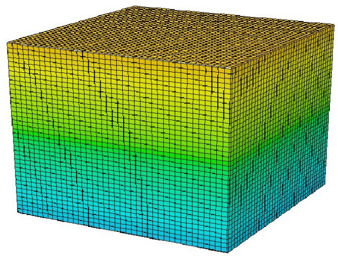
Equipo:

Cortes planos

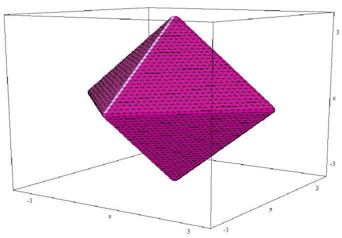
Las animaciones que se os mostrarán corresponden al resultado de ir cortando por planos paralelos alguno de los cinco sólidos platónicos:



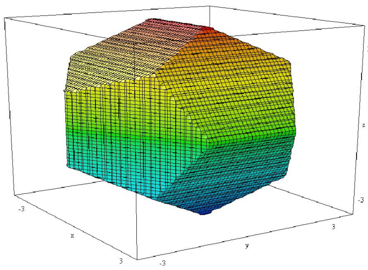
Tetraedro



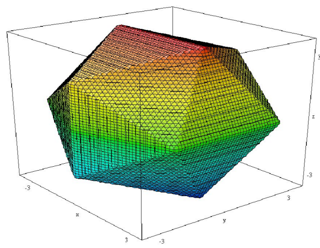
Cubo



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

Intenta adivinar de qué poliedro se trata en cada caso y rellena la tabla siguiente:

Animación nº	Color	Poliedro
1	Salmón	
2	Morado	
3	Azul oscuro	
4	Rojo oscuro	
5	Rojo	
6	Multicolor	
7	Turquesa	

Os puede resultar útil ayudaros con los poliedros que os facilitamos.

VII Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2009

Equipo:

Cálculo de multitudes

Es habitual que, ante determinados eventos que suponen la concentración de un gran número de personas, se produzca una "guerra de cifras" cuando se trata de estimar la cantidad de asistentes.

Por ejemplo, en una manifestación contra un gobierno las cifras que ofrecen los convocantes suelen ser unas cinco o diez veces mayores que las que ofrecen las autoridades.

Por supuesto, muchas veces en estos cálculos influye un interés de quien los hace por que las cifras sean altas o bajas. De hecho, cuando hay un "interés general" en que sean altas, por ejemplo cuando se estiman los asistentes a un acto festivo, suele haber más unanimidad, lo cual no implica necesariamente que los cálculos sean mejores.

Una forma razonable de estimar el número de personas congregadas en un recinto consiste en calcular el área del recinto y multiplicar por la "densidad" del público, o sea el número de personas que pueden caber en una unidad de área. Lo primero se puede hacer generalmente de manera precisa, y la densidad puede ser algo más complicada pues depende de cómo de apretada esté la gente. No es lo mismo una manifestación, en la que la gente camina y debe dejar más espacio, que un desfile en el que los asistentes están quietos.

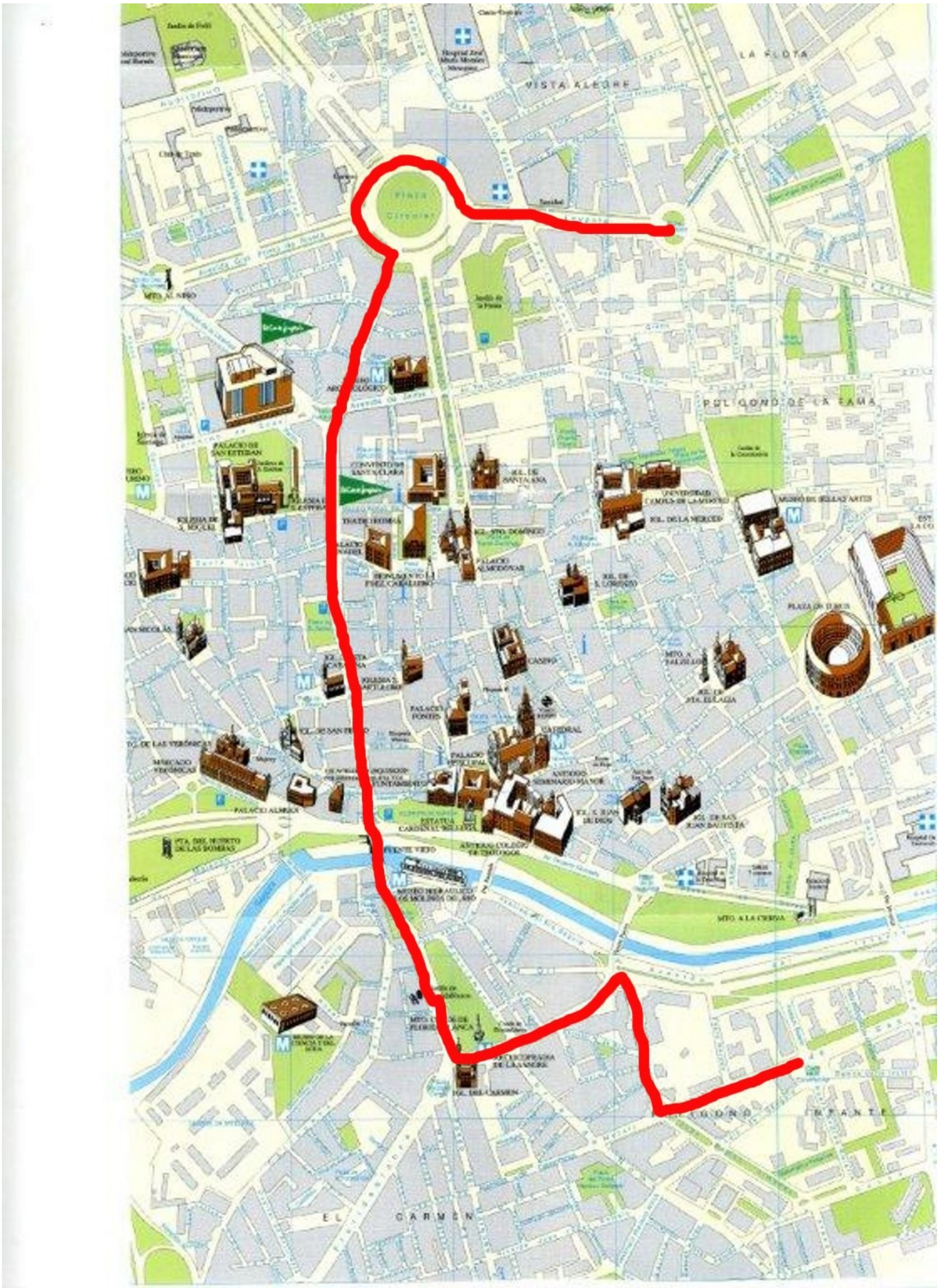
En esta prueba debéis resolver dos cuestiones, y sobre todo **explicar cómo llegáis a esas soluciones**:

Por una parte, debéis estimar el **número máximo de personas que cabrían de pie en la explanada** donde se celebra esta prueba. El recinto que se considera es el cubierto por las losas rectangulares, desde el camino verde hasta las escaleras, y las personas deben estar muy juntas.

En segundo lugar, debéis hacer una estimación "tirando por lo alto" del **número de personas que asisten al Entierro de la Sardina** en Murcia. Tenéis un mapa con el recorrido que os permitirá, usando la escala, estimar la longitud del recorrido. Supondremos, para tirar por lo alto, que durante todo el recorrido hay cuatro filas de sillas a cada lado del desfile y diez filas de personas de pie detrás.

Recordad que debéis entregar no sólo vuestras soluciones sino también las explicaciones de cómo llegáis a ellas.

RECORRIDO DEL ENTIERRO DE LA SARDINA 2009



Escala: 1cm = 100m

VII Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2009

Equipo:

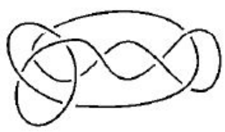
Nudos

Los nudos son objetos de uso cotidiano desde tiempos remotos. La idea que usualmente tenemos de un "nudo" es la de un trozo de cuerda con cierto grado de enmarañamiento pero con los extremos libres, tal y como hacemos cuando nos atamos los cordones de los zapatos, nos anudamos las corbatas o con los distintos nudos marineros.

El concepto matemático de nudo es distinto; podemos decir que, matemáticamente hablando, un nudo es un trozo de cuerda en el que, tras darle un determinado grado de enredo, se juntan los extremos de tal manera que no podamos distinguir donde se han pegado. No tiene importancia que la cuerda sea más o menos gruesa ni más o menos larga, lo importante es que sea una línea cerrada.

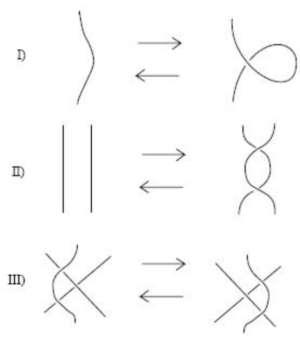
Toda modificación de un nudo que se realize sin cortar ni volver a pegar la cuerda que lo representa producirá un **nudo equivalente.** La teoría matemática de nudos tiene aplicaciones a campos muy diversos.

Usualmente un nudo se describe por medio de lo que denominamos su **diagrama**, que correspondería a dejar caer el nudo sobre una mesa, destacando en cada cruce la diferencia entre el tramo que está encima y el que está debajo (que normalmente aparece marcado con una interrupción).



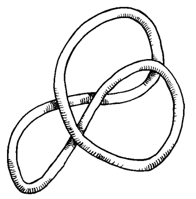
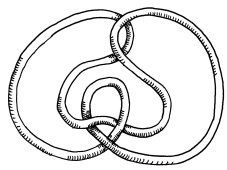
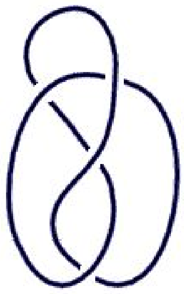
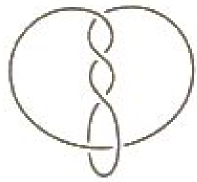
Un mismo nudo, o nudos equivalentes, pueden admitir distintas representaciones en forma de diagrama, así que surge el primer problema fundamental, ¿cuándo dos diagramas representarán el mismo nudo?

En 1927, Reidemeister resuelve parcialmente este problema. El teorema de Reidemeister permite decidir si un nudo es igual otro tan sólo haciendo dibujos y es una buena herramienta en la teoría de nudos. Según este resultado: Dos diagramas representan nudos equivalentes precisamente cuando se puede pasar de uno a otro haciendo un número finito de transformaciones de tipo I, II y III, representadas en la siguiente figura:



Como un mismo nudo puede tener distintos diagramas, el número de cruces que aparecen puede depender de como se haya construido el diagrama, sin embargo podemos definir el **mínimo número de cruces de un nudo** como el número de cruces que tiene el diagrama de ese nudo que menos cruces tenga. El nudo con un diagrama sin cruces se denomina un nudo trivial, podría ser representado por una circunferencia; de hecho, es el único nudo que tiene diagramas con un único cruce.

¿Qué mínimo número de cruces crees que tienen los nudos representados en los diagramas siguientes?

Dibuja un nudo con mínimo número de cruces exactamente cinco y otro con seis.

VII Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2009

Equipo:

Prueba intermedia 1

¿Cuántos divisores tiene el número $2^3 \times 3^2 \times 7$?

¿Cuál es el mayor número menor que 10 000 que tiene exactamente 5 divisores?

VII Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2009

Equipo:

Prueba intermedia 2

¿Qué número tiene exactamente 9 divisores que suman 403?

VII Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2009

Equipo:

Prueba intermedia 3

¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?

VII Gymkhana Matemática
Facultad de Matemáticas
Murcia, abril 2009

Equipo:

Prueba intermedia 4

¿Qué polígonos regulares tienen diagonales de exactamente 7 longitud distintas?