MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LAS FINANZAS

Carlos Vázquez Cendón

Departamento de Matemáticas
Facultad de Informática
Universidade da Coruña
carlosv@udc.es

Jornadas de Matemática de los Mercados Financieros
Murcia, Marzo 2010

1. *Algunos productos derivados sencillos*
2. *Cálculo estocástico y modelos de precios de activos*
3. *Técnica de cobertura dinámica y modelos de Black-Scholes*
4. *Métodos numéricos para valorar opciones con un factor estocástico*

Ejemplo de producto estructurado

Se considera el depósito estructurado referenciado a una cesta de 6 acciones: Vodafone, Telefónica, ING, Carrefour, Danone y Nokia. Se podrá contratar desde el día 15 de marzo hasta el 25 de mayo. Su rentabilidad estará sujeta a las siguientes condiciones:

- Un cupón inicial fijo al día 31-5-2010 del $2,5\%$ TAE
- Un cupón a vencimiento (1-6-2012) que depende del comportamiento de las acciones. Si al vencimiento:
  - Todas las acciones están igual o por encima de su valor inicial, se paga un cupón del 20%
  - Cinco acciones están igual o por encima de su valor inicial, se paga un cupón del 10%
  - Cuatro acciones están igual o por encima de su valor inicial, se paga un cupón del 5%
  - En otro caso, se paga un cupón del 2%

Algunos productos derivados

- Contrato a plazo
- Futuro
- Opción

Contrato a plazo (forward)

- Es un contrato para comprar o vender un producto por determinado precio en cierto instante futuro.
- La posición larga (long position) acepta realizar la compra y la posición corta (short position) acepta realizar la venta que tiene lugar
- Estamos obligados a realizar la transacción y no se paga prima inicial
- Lo contrario es un contrato al contado (spot) en el que la transacción tiene lugar en el instante actual

Ejemplo

Un comerciante se compromete a comprar a un agricultor 10000 kilos de cosecha de tomates a 0.2 euros/kilo 6 meses después de la firma del contrato.

Futuros (futures)

- Es igual que el contrato a plazo, pero tiene lugar en un mercado regulado, que especifica las condiciones del contrato.

Ejemplo

Un inversor acude al CBOT y le pide a un broker que compre 1 futuro sobre 1000 m^3 de trigo para el mes de julio. El precio resultante será consecuencia del ajuste entre la oferta y la demanda que aparezcan en el CBOT.

Opción (Option)

- Es un contrato que da a su poseedor el **derecho** a comprar (opción de compra - *call option*) o a vender (opción de venta - *put option*) una cantidad de bienes (subyacente - *underlying*) a un precio determinado (precio de ejercicio - *strike price*) antes de o en una determinada fecha (fecha de vencimiento - *expirity date*).
- Para obtener el derecho, el poseedor de la opción ha pagado una determinada cantidad (prima - *option price*).

- *Ejemplo*

  En el MEFF adquirimos hoy una opción de compra de 100 acciones de Telefónica por 15 euros, que podemos ejercer hasta el 15 de junio

Opciones vainilla

- La función de pago depende únicamente del valor del activo en el momento del ejercicio
- Clases
  - De compra o CALL
  - De venta o PUT
- Estilo
  - **Europeo** : Sólo se pueden ejercer en fecha de vencimiento. Ejemplo: Opciones sobre el IBEX-35.
  - **Americano**: Se pueden ejercer en cualquier instante anterior a la fecha de vencimiento.
    Ejemplo: Opciones sobre acciones.

Pregunta:

¿Cúanto debemos pagar por un contrato de derivados?

$$\Downarrow$$

VALORACIÓN

Algunos problemas que resuelven los Métodos Numéricos

1. Ecuaciones no lineales
   Cálculo de la TIR de un bono
2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales
   Valoración con modelos de Black-Scholes
3. Interpolación, derivación e integración numéricas
   Cálculo de griegas de opciones
4. Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales
   Modelos de Black-Scholes de uno y varios factores
5. Optimización numérica
   Calibración, gestión de carteras, etc.

Estos problemas aparecen en valoración financiera

¿Qué es la valoración?

- Precio de mercado del producto $\Leftarrow$ Oferta - Demanda
- Valoración: precio justo de referencia
- Modelos de valoración $\Rightarrow$ Problemas matemáticos y numéricos

Ejemplo: Valoración de contratos de futuros

- La valoración de contratos de futuros determina el precio justo que se debe pagar para recibir en una fecha futura un activo a un precio pactado, teniendo en cuenta el precio actual del activo, sus rentas futuras y el tipo de interés libre de riesgo.
- Valor del contrato de futuros en el instante t:

$$F_T(t) = e^{-r(T-t)}(S(T) - E) = S(t) - Ee^{-r(T-t)}$$

  - E : precio pactado
  - T : fecha de vencimiento del contrato de futuros
  - $S(t)$: precio del subyacente en el instante t
  - r : tipo de interés compuesto y continuo

Modelo : Actualización de valor futuro

Ejemplo: Valoración de un bono con interés determinista y cupones fijo

- Un bono ordinario es un contrato que garantiza el pago de una cierta cantidad en una fecha futura
- El bono puede incluir el pago de cupones en determinadas fechas
- Los cupones pueden ser cantidades fijas o dependientes de tipos (FRN)
- Para recibir esta cantidad, el propietario paga una prima en la fecha inicial
- Los bonos también se negocian en el mercado secundario

Valoración del bono (I)

- Z : cantidad a recibir en la fecha de vencimiento
- C_i: cantidad que paga el cupón $i-$ésimo al final año i
- m : número de años desde la emisión hasta el vencimiento
- r_i: tipo de interés anual a la fecha de pago cupón $i-$ésimo

Valor del bono en el momento de emisión (B):

$$B = \frac{C_1}{(1+r_1)} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C_m}{(1+r_m)^m} + \frac{Z}{(1+r_m)^m}$$

Modelo : Actualización de flujos futuros

Tasa interna de rendimiento (y)

$$B = \frac{C_1}{(1+y)} + \frac{C_2}{(1+y)^2} + \cdots + \frac{C_m}{(1+y)^m} + \frac{Z}{(1+y)^m}$$

Resolución de ecuación no lineal

Modelo de precios de activos con riesgo (I)

La teoría de valoración de opciones requiere un modelo de evolución del subyacente (acción o índice, por ejemplo) que es un producto con riesgo.
El punto de partida es la **Hipótesis del mercado eficiente**:

- El valor actual del activo es consecuencia del su valor en el pasado inmediato
- El mercado del activo responde de manera instantánea a cualquier nueva información sobre el mismo.

En consecuencia se propone un **Modelo Estocástico**

Modelo de precios de activos con riesgo (II)

Los precios del activo siguen un **movimiento Browniano** con camino aleatorio lognormal.

- Modelo en tiempo discreto:

$$\underbrace{\frac{S(t+dt)-S(t)}{S(t)}}_{\text{rendimiento (return)}} = \underbrace{\mu\, dt}_{\text{tendencia (drift)}} + \underbrace{\sigma}_{\text{volatilidad}} \underbrace{dX(t)}_{\text{proceso de Wiener discreto}}$$

- Modelo en tiempo continuo:

$$\underbrace{\frac{dS}{S}(t)}_{\text{rendimiento (return)}} = \underbrace{\mu\, dt}_{\text{tendencia (drift)}} + \underbrace{\sigma}_{\text{volatilidad}} \underbrace{dX(t)}_{\text{proceso de Wiener continuo}}$$

Ecuación diferencial estocástica

Cálculo estocástico y finanzas(I)

- Modelo de precios de activo en tiempo continuo:

$\frac{dS}{S}(t)$	$=$	$\mu\, dt$	$+$	σ	dX_t
rendimiento relativo		tendencia		volatilidad	proceso de Wiener continuo

$$dS_t \quad = \quad \mu S_t\, dt \; + \; \sigma S_t\, dX_t$$

- Utilizando el lema de Ito para $F(t, y) = ln(y)$, se tiene:

$$\begin{aligned} d(ln(S_t)) \quad &= \quad \left(0 + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \left[\frac{-1}{S_t^2}\right] + \mu S_t \frac{1}{S_t}\right) dt \; + \; \sigma S_t \frac{1}{S_t}\, dX_t \\ &= \quad \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt \; + \; \sigma\, dX_t \end{aligned}$$

Cálculo estocástico y finanzas (II)

- La interpretación de la diferencial estocástica es:

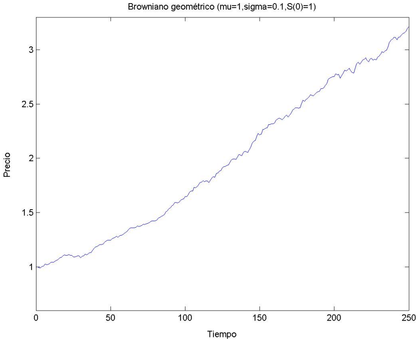
$$\begin{aligned} ln(S_t) - ln(S_0) &= \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) d\tau + \int_0^t \sigma \, dX_\tau \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma \, X_t \end{aligned}$$

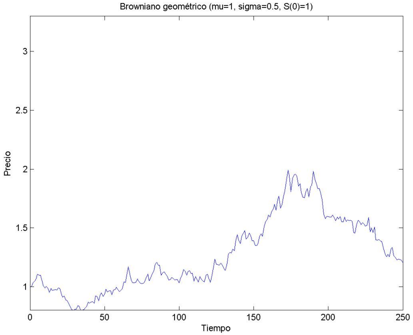
- El precio del activo sigue la evolución de un proceso lognormal:

$$S_t = S_0 \, exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \, t + \sigma \, X_t \right)$$

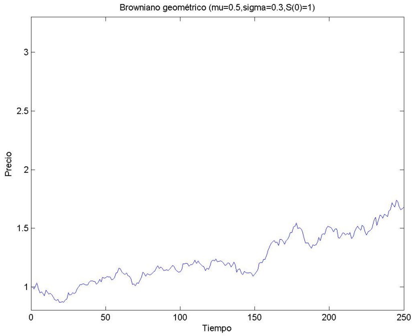
- La expresión anterior permite simular evoluciones de precios para S_0, σ y μ conocidos.
- En ausencia de riesgo ($\sigma = 0$), el crecimiento es exponencial

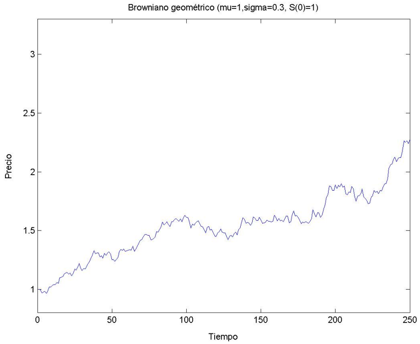
Browniano geométrico (mu=1, S(0)=1)





Browniano geométrico (sigma=0.3, S(0)=1)





Lectura recomendada para más información

- T. Mikosh, Elementary stochastic calculus with finance in view, World Scientific Press, Singapur, 1998.
- R. Seydel, Tools for computational finance, Springer, Berlin, 2002.
- P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, The mathematics of financial derivatives. A students introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, Option pricing: Mathematical models and computation, Oxford Financial Press, Oxford, 1996.

Hipótesis del modelo de Black-Scholes:

- El precio del activo sigue un camino aleatorio lognormal.
- El tipo de interés libre de riesgo, r, y la volatilidad del activo, σ, son funciones conocidas del tiempo.
- No se consideran los costes de transacción (mercado sin fricciones) ni fiscales.
- Ausencia de arbitraje: todas las carteras libres de riesgo tienen el mismo tipo de interés r.
- Se puede comprar y vender una cantidad no necesariamente entera de activos financieros en tiempo continuo (mercado continuo).
- En principio supondremos que el activo no paga dividendos.
- Mercado con posiciones en corto y largo: se pueden vender activos que no se poseen garantizando su reintegro a vencimiento.

Cobertura dinámica (Δ-hedging) (I)

- El valor del activo, S, sigue el camino aleatorio lognormal:

$$dS = \mu S\, dt \;+\; \sigma S\, dX$$

- El valor de la opción, V, depende el S y de t.
- Aplicamos el lema de Ito a la función $V(t, S)$:

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \;+\; \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\, dX$$

- Combinando los procesos S y V construimos otro proceso determinista π en la forma:

$$\pi = V - \Delta S$$

- La cartera libre de riesgo, π, en $[t, t + dt]$ se obtiene, por ejemplo, vendiendo Δ acciones y comprando 1 opción de compra en tiempo t.

Cobertura dinámica (Δ-hedging) (II)

- Utilizando el cálculo estocástico:

$$\pi = V - \Delta S \Rightarrow d\pi = dV - \Delta dS \Rightarrow$$

$$d\pi = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S\right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dX$$

- La cartera π es libre de riesgo $\Leftrightarrow \Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$. En este caso:

$$d\pi = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt$$

- Como π es libre de riesgo y no existe arbitraje entonces

$$d\pi = r\pi dt = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right) dt$$

Cobertura dinámica (Δ-hedging) (III)

- Igualando las expresiones anteriores:

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right)$$

- Se obtiene la **Ecuación de Black-Scholes**:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- La tendencia del activo, μ, no influye en el valor de la opción
- Matemáticamente, se trata de una ecuación en derivadas parciales parabólica.
- Para que un problema asociado a ella esté bien planteado se deben considerar condiciones finales, i.e. $V(T, S)$.

Black-Scholes para vainilla europeas de compra

Sea $D = [0, T] \times [0, \infty)$
Encontrar la función $C = C(t, S)$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0 \text{ en } D \\ C(T, S) = max(S - E, 0), & \qquad S > 0 \end{aligned}$$

r :	interés libre de riesgo	σ :	volatilidad del activo
E :	precio de ejercicio	T :	fecha de vencimiento

Fórmula de Black-Scholes para vainilla europeas de compra

Solución exacta del modelo de Black-Scholes:

$$C(t,S) = S\ N(d_1)\ -\ E\ exp(-r(T-t))N(d_2)$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{log(S/E) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= \frac{log(S/E) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp(-y^2/2)\, dy
\end{aligned}$$

r :	interés libre de riesgo	σ :	volatilidad del activo
E :	precio de ejercicio	T :	fecha de vencimiento

Black-Scholes para vainilla europeas de venta

Sea $D = [0, T] \times [0, \infty)$, encontrar la función $P = P(t, S)$ tal que:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \text{ en } D$$

$$P(T, S) = max(E - S, 0), \qquad S > 0$$

Solución exacta:

$$P(t, S) = E\, exp(-r(T - t))N(-d_2) \; - \; S\; N(-d_1)$$

Valoración de vainilla europea de compra

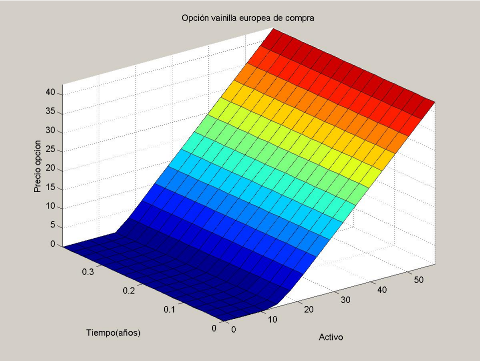
Datos de la opción:

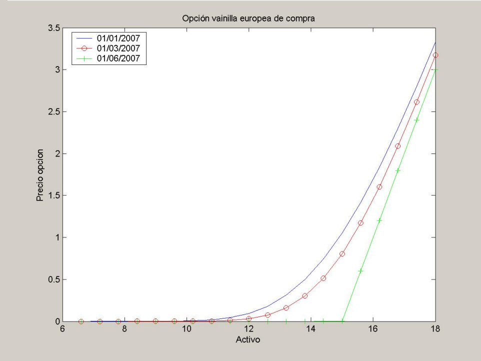
Fecha inicial:	$01-02-10$
Fecha vencimiento:	$01-07-10$
Precio ejercicio:	$15,00$
Tipo de interés:	3%
Volatilidad activo:	25%
Fecha actual:	$12-03-10$
Precio activo:	$17,00$

Valoración:

Opción:	$2,24$
Delta:	$0,87$
Gamma:	$0,10$
Theta:	$-1,28$
Vega:	$1,72$
Rho:	$3,00$

Valor de opción de vainilla europea de compra





Opción Call vanilla con dividendos continuos

El valor, C, de la opción verifica en $D = [0, T] \times [0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - D_0) S \frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0 \text{ en } D, \\ C(T, S) = max(S - E, 0), \qquad & S > 0, \end{aligned}$$

cuya solución exacta resulta:

$$C(t, S) = S\, exp(-D_0(T - t))\, N(d_1) \; - \; E\, exp(-r(T - t))\, N(d_2)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{log(S/E) + (r - D_0 + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_2 &= \frac{log(S/E) + (r - D_0 - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \end{aligned}$$

Opciones vainilla americanas

- Ejemplo en el MEFF: Opciones sobre acciones.
- Pueden ejercerse antes o en la fecha de vencimiento.
- Se trata de determinar el valor de la prima en tiempos anteriores al vencimiento.
- Su valoración con Black-Scholes requiere el uso de métodos numéricos. No se conoce fórmula exacta.

Black-Scholes para vainilla americanas de venta

Sea $D = [0, T] \times [0, \infty)$, encontrar la función $P = P(t, S)$ tal que:

$$L(P) = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP \quad \leq \quad 0 \text{ en } D$$

$$P(t, S) \geq max(E - S, 0)\,, \qquad \text{en } D$$

$$L(P) \cdot (P - max(E - S, 0)) = 0, \qquad \text{en } D$$

$$P(T, S) = max(E - S, 0), \qquad S > 0$$

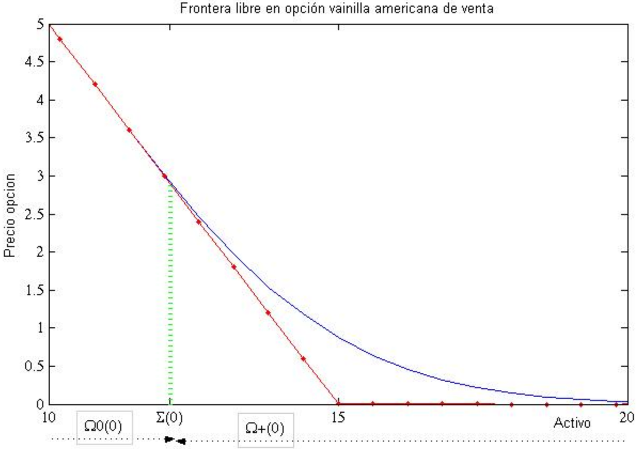
$$P(t, S) \approx 0, \qquad t \in [0, T],\; S \to \infty$$

$$P(t, 0) = E\, exp(-r(T - t)), \qquad t \in [0, T]$$

Problema de frontera libre de opciones americanas

- Además del valor de la opción en cada instante y para cada precio del activo, se determina para qué valor del activo se debe ejercer o mantener la opción
- Matemáticamente, para cada $t \in [0, T]$ se distinguen los conjuntos:
  - Región de ejercicio (coincidencia): La opción toma su valor de ejercicio
    $$\Omega^0(t) = \{S \in [0, \infty) / P(t, S) = max(E - S, 0)\}$$
  - Región de no ejercicio (no coincidencia):
    $$\Omega^+(t) = \{S \in [0, \infty) / P(t, S) > max(E - S, 0)\}$$
  - Valor de la acción que separa ambas regiones (frontera libre):
    $$\Sigma(t) = \partial\Omega^+(t) \cap \partial\Omega^0(t)$$
- Frontera de ejercicio óptimo (frontera móvil):
  $$\Sigma = \{(t, \Sigma(t)) / t \in [0, T]\}$$

Frontera libre en opción vainilla europea de venta



Lectura recomendada para más información

- P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, The mathematics of financial derivatives. A students introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, Option pricing: Mathematical models and computation, Oxford Financial Press, Oxford, 1996.
- Y.K. Kwok, Mathematical models of financial derivatives, Springer Finance, Springer, Singapur, 1998.
- I. Achdou, O. Pironneau, Computational methods for option pricing, SIAM, Philadelphia, 2005.

Métodos numéricos para opciones

En general, los métodos numéricos se pueden clasificar en tres tipos:

- Métodos basados en árboles (binomiales, trinomiales, etc)
- Métodos de Monte Carlo
- Métodos basados en modelos de Black-Scholes

Métodos numéricos para Black-Scholes

- La fórmula exacta de Black-Scholes sólo es aplicable a opciones vainilla europeas con parámetros (volatilidad, tipo de interés) constantes.
- Para las opciones americanas no se conoce solución exacta.
- Existe una amplia gama de productos financieros gobernados por ecuaciones de tipo Black-Scholes más generales que requieren métodos numéricos.
- Los métodos numéricos más utilizados para Black-Scholes se agrupan en:
  - Diferencias finitas
  - Elementos finitos
  - Volúmenes finitos

Diferencias finitas para vainilla europeas

Call europea con dividendos continuos:
El valor, C, de la opción verifica en $D = [0, T] \times [0, \infty)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - D_0) S \frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0 \text{ en } D, \\
C(T, S) = max(S - E, 0), & \qquad S > 0, \\
C(t, S) \approx S\, exp(-D_0(T - t)) - E\, exp(-r(T - t))\,, & \qquad t \in [0, T],\ S \to \infty \\
C(t, 0) = 0, & \qquad t \in [0, T],
\end{aligned}$$

- Existe solución exacta para validar el método
- La ecuación se puede reducir a una de coeficientes constantes con el cambio $x = ln(S/E)$ y aplicar diferencias finitas (aparece una condición para $x \to -\infty$)
- La ecuación se puede reducir a la del calor y aplicar diferencias finitas (aparece una condición para $x \to -\infty$)

Truncamiento del dominio

El valor, C, de la opción verifica en $D = [0, T] \times [0, S_\infty]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - D_0) S \frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0 \text{ en } D, \\
C(T, S) = max(S - E, 0), & \qquad S > 0, \\
C(t, S_\infty) = S_\infty \, exp(-D_0(T - t)) - E \, exp(-r(T - t)) \, , & \qquad t \in [0, T], \\
C(t, 0) = 0, & \qquad t \in [0, T],
\end{aligned}$$

- Para aplicar diferencias o elementos finitos es preciso considerar un dominio acotado en activo
- Se elige un valor del activo suficientemente grande, S_∞, de modo que el valor de la opción en la zona de interés no se vea afectado por este valor. $S_\infty = 3E$ ó $S_\infty = 4E$ son elecciones clásicas

DF implícito en tiempo y descentrado en activo (I)

- Dados S_∞ y T, se plantea una malla de diferencias finitas del dominio acotado: dados los números naturales $N > 1$ y $M > 1$, se definen los pasos de tiempo y de activo de la malla

$$\Delta t = T/(N+1), \;\; \Delta S = S_\infty/(M+1)$$

y los puntos (nodos) de la malla de diferencias finitas son

$$(t_j, S_i) = (j\Delta t, i\Delta S), \; j = 0, \ldots, N+1; \; i = 0, \ldots, M+1.$$

- Se aproximan de las derivadas de la función, que aparecen en la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t_j, S_i) &\approx \frac{C(t_j, S_{i+1}) - 2C(t_j, S_i) + C(t_j, S_{i-1})}{\Delta S^2} \\
\frac{\partial C}{\partial S}(t_j, S_i) &\approx \frac{C(t_j, S_{i+1}) - C(t_j, S_i)}{\Delta S} \\
\frac{\partial C}{\partial t}(t_j, S_i) &\approx \frac{C(t_{j+1}, S_i) - C(t_j, S_i)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

DF implícito en tiempo y descentrado en activo (VI)

La convergencia del algoritmo se puede consultar en:
Achdou-Pironneau: *Computational methods for option pricing*

- Cuando $\Delta t \to 0$ y $\Delta S \to 0$ las aproximaciones obtenidas tienden a la solución exacta.
- Pero, cuando $\Delta t \to 0$ y $\Delta S \to 0$ el coste computacional se incrementa.

Black-Scholes para vainilla americanas de venta

Sea $D = [0,T] \times [0,\infty)$, encontrar la función $P = P(t,S)$ tal que:

$$
\begin{aligned}
L(P) = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP \quad &\leq \quad 0 \text{ en } D \\
P(t,S) \geq max(E-S,0)\,, \qquad & \text{en } D \\
L(P)\cdot(P - max(E-S,0)) = 0, \qquad & \text{en } D \\
P(T,S) = max(E-S,0), \qquad & S > 0 \\
P(t,S) \approx 0, \qquad & t \in [0,T],\ S \to \infty \\
P(t,0) = E\,exp(-r(T-t)), \qquad & t \in [0,T]
\end{aligned}
$$

DF implícito en tiempo y DF en activo

- Para $j = N, N-1, \ldots, 1, 0$, encontrar la función $P_j = P(t_j, .)$ con:

$$\frac{P_{j+1} - P_j}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} P_j{}'' + rSP_j' - rP_j \leq 0$$

$$P_j \geq g_j$$

$$\left(\frac{P_{j+1} - P_j}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} P_j{}'' + rSP_j' - rP_j \right) (P_j - g_j) = 0$$

- Discretizando las derivadas respecto de S con diferencias finitas, se obtiene el problema de complementariedad discreto:

$$A\,\overline{P}_j \;\geq\; b_j\,,\; \overline{P}_j \geq \overline{g}_j\,,\; \left(A\,\overline{P}_j - b_j\right)^T (\overline{P}_j - \overline{g}_j) = 0.$$

- Este es equivalente al problema de optimización cuadrática con restricciones:

$$\frac{1}{2} \overline{P}_j^T A \overline{P}_j - \overline{P}_j^T b_j \;=\; \min_{y \geq \overline{g}_j} \left(\frac{1}{2} y^T A y - y^T b_j \right)$$

Opciones barrera (I)

Las opciones barrera de tipo vainilla son opciones vainilla en las que el contrato depende de si el activo alcanza cierto valor o barrera. Hay varios tipos de opciones barrera:

- **up and in**: La opción no es efectiva hasta que se alcanza la barrera desde abajo
- **down and in**: La opción no es efectiva hasta que se alcanza la barrera desde arriba
- **up and out**: La opción deja de ser efectiva cuando se alcanza la barrera desde abajo
- **down and out**: La opción deja de ser efectiva cuando se alcanza la barrera desde arriba

- Como pueden ser de compra y de venta, de carácter europeo y americano tenemos 16 tipo de opciones barrera
- Algunas opciones barrera pagan una cierta cantidad de dinero (rebate) si se toca la barrera

Opciones barrera down and out call europeas (I)

En este caso la opción de compra deja de ser efectiva cuando se alcanza la barrera desde arriba antes de vencimiento. Supongamos que la barrera, X, es superior al strike, E. El modelo de Black-Scholes se escribe:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \qquad S > X,\, T > t > 0$$

$$V(T,S) = max(S-E,0), \qquad S > X$$

$$V(t,X) = 0, \qquad t \in [0,T]$$

$$V(t,S) \approx S - E\,exp(-r(T-t)), \qquad t \in [0,T],\ S \to \infty$$

Opciones asiáticas (I)

Se trata de opciones en las que aparece el valor medio del activo en la función de pago. Distintas medias posibles entre T_1 y t:

- Media aritmética continua:

$$A(t) = \frac{1}{t - T_1} \int_{T_1}^{t} S(\tau) d\tau$$

- Media aritmética discreta:

$$A(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S(t_i)$$

- Media geométrica continua:

$$A(t) = exp\left(\frac{1}{t - T_1} \int_{T_1}^{t} ln(S(\tau)) d\tau \right)$$

- Media geométrica discreta:

$$A(t) = \left(\Pi_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{1/n}$$

Opciones asiáticas (II)

- Para una CALL la función de pago a vencimiento puede ser:
  - Diferencia entre media activo y valor fijo:

$$\max(A(T) - E, 0) \text{ fixed strike-average rate}$$

  - Diferencia entre activo y media del activo (average strike):

$$\max(S - A(T), 0) \text{ floating strike-average strike}$$

- Análogamente se tienen los pagos a vencimiento para una PUT
- Pueden tener carácter europeo o americano (ejercicio anticipado)
- Pueden incorporar a su vez una barrera
- En el caso europeo se puede utilizar simulación de Monte Carlo

Métodos numéricos en otros mundos cercanos

- Calibración de parámetros
- Volatilidad implícita, local, estocástica
- Derivados de tipos
- Opciones reales
- Otros derivados....