

Área de Conocimiento: **Álgebra**

Departamento: **Matemáticas**

Profesorado:

Clases Teóricas y Prácticas: **Ángel del Río Mateos**

Horario de Tutorías: Martes y Jueves de 15:00h a 18:00h

### Presentación de la asignatura

Esta asignatura está dedicada al estudio de las Ecuaciones Algebraicas a través de la Teoría de Galois que establece relaciones entre la teoría de cuerpos y la de grupos. Tras un estudio general de la teoría se dan aplicaciones a extensiones de cuerpos particulares y a construcciones geométricas.

### Objetivos

- Conocer la relación entre ecuaciones algebraicas, extensiones de cuerpos y grupos y utilizarla para obtener propiedades de las primeras en función de estos últimos.
- Aplicar dicha teoría a la resolubilidad de ecuaciones por radicales y a la resolución de los problemas clásicos de construcciones con regla y compás.

### Conocimientos previos necesarios:

Álgebra Lineal (espacios vectoriales, bases, dimensión, aplicaciones lineales, etc) y rudimentos sobre estructuras algebraicas elementales (grupos, anillos, cuerpos y polinomios).

### Capacidades y destrezas a adquirir por el alumno

- Determinar la irreducibilidad de polinomios en una o varias indeterminadas y, en su caso, factorizarlos.
- Expresar polinomios simétricos en función de los polinomios simétricos elementales.
- Saber decidir si un grupo finito es resoluble.
- Calcular el polinomio irreducible de un elemento algebraico.
- Calcular el grado y una base de una extensión finita.
- Determinar propiedades de una extensión de cuerpos: algebraicidad, separabilidad, normalidad, etc.
- Encontrar la clausura normal y la clausura separable de una extensión.
- Calcular el grupo de Galois de una extensión y utilizarlo para deducir propiedades de dicha extensión y para calcular los cuerpos intermedios.
- Determinar las propiedades de extensiones ciclotómicas y cíclicas.
- Encontrar el grupo de Galois de una ecuación algebraica y utilizarlo para determinar su resolubilidad por radicales y, en su caso, resolverla.
- Resolver problemas sobre constructibilidad con regla y compás.

### Programa de la Asignatura

1. **Anillos** Anillos. Ideales. Anillos cociente. Homomorfismos de anillos. Dominios. Cuerpos. El cuerpo de fracciones de un dominio.
2. **Polinomios** Anillos de polinomios en una y varias indeterminadas. Propiedad Universal. Raíces de un polinomio. Divisibilidad en anillos de polinomios. Derivadas y raíces múltiples. Polinomios simétricos.

3. **Grupos** Grupos. Subgrupos. Clases laterales. Teorema de Lagrange. Subgrupos normales. Grupos cociente. Homomorfismos de grupos. Teoremas de Isomorfía. El orden de un elemento de un grupo. Grupos cíclicos. El Teorema Chino de los Restos. Conjugación. Acciones de grupos en conjuntos. El Teorema de Cauchy. Los Teoremas de Sylow.
4. **Grupos de permutaciones** Grupo simétrico. Ciclos y trasposiciones. Descomposición de una permutación en producto de ciclos. Grupo alternado. El Teorema de Abel.
5. **Grupos resolubles** El subgrupo derivado y la serie derivada. Grupos resolubles. Propiedades fundamentales de los grupos resolubles.
6. **Extensiones de cuerpos** Extensiones de cuerpos. Adjunción de raíces. Teorema de Kronecker. Extensiones algebraicas.
7. **Cuerpos de descomposición** Cuerpo de descomposición de un polinomio; existencia y unicidad. Clausuras algebraicas; existencia y unicidad. Cuerpo de descomposición de una familia de polinomios. Extensiones normales. Propiedades. Clausura normal.
8. **Extensiones ciclotómicas** Raíces de la unidad. Extensiones ciclotómicas. Polinomios ciclotómicos.
9. **Extensiones separables** Extensiones separables. Grado de separabilidad. Propiedades de las extensiones separables. Teorema del elemento primitivo.
10. **Extensiones de Galois** Grupo de Galois de una extensión. Teorema fundamental de la Teoría de Galois. Caracterización de las extensiones de Galois algebraicas. Propiedades de las extensiones de Galois. Construcción de polígonos regulares 2.
11. **Construcciones con regla y compás** Las construcciones con regla y compás. Teorema de Wantzel. Los tres problemas clásicos sobre construcciones con regla y compás. Construcción de polígonos regulares 1.
12. **Extensiones cíclicas** Norma y traza. Teorema 90 de Hilbert. Extensiones cíclicas.
13. **Extensiones radicales** Extensiones radicales. Caracterización de extensiones radicales de Galois.
14. **Resolubilidad de ecuaciones por radicales** El grupo de Galois de un polinomio. Resolubilidad de ecuaciones por radicales. La ecuación general de grado  $n$ . Resolventes. Resolución de las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado. Resolubilidad de las ecuaciones de grado 5.

### Metodología didáctica

La parte teórica se desarrollará mediante clases en pizarra con esporádicas utilizaciones de otros medios audiovisuales.

La parte práctica consistirá fundamentalmente en la resolución en el aula de problemas y ejercicios de aplicación de los contenidos desarrollados. Se realizarán algunas prácticas en microaula de aplicación de los métodos de la asignatura.

### Criterios básicos de evaluación

Se realizarán dos exámenes parciales con una duración aproximada de cuatro horas cada uno.

Periódicamente serán distribuidas hojas de problemas. En las horas de problemas los alumnos y alumnas explicarán las soluciones de estos problemas.

Se propondrán varios trabajos de realización voluntaria. Estos trabajos pueden ser bien la realización de algún programa informático que implemente algunos de los métodos explicados en las clases teóricas o la lectura y exposición pública de algún tema relacionado con la asignatura que no haya sido visto en las horas de clase.

Antes del examen final se hará pública una lista con los resultados obtenidos durante el curso. Para calcular este resultado se utilizará el resultado obtenido en los dos parciales (que tendrá un

peso del 85 %) y la resolución de problemas en el aula (con un peso del 15 %). La nota podrá ser mejorada hasta un 10 % con los trabajos de realización voluntaria. Los alumnos y alumnas que hayan obtenido una nota global de 5 o más puntos, y que al menos tengan una nota de 4 puntos (sobre un total de 10) en cada uno de los dos parciales se considerarán aprobados sin necesidad de participar en el examen final.

Para los alumnos que realicen el examen final se calculará la nota con el resultado obtenido en dicho examen, al que se sumará el resultado obtenido con la realización de problemas y la nota podrá ser mejorada hasta en un 10 % por la realización de los trabajos voluntarios.

Todos los exámenes serán escritos y constarán de cuestiones teóricas y problemas.

### **Bibliografía Básica**

1. J. ASENSIO, J.R. CARUNCHO y J. MARTÍNEZ, Ecuaciones Algebraicas, Universidad de Murcia, DM, Murcia, 2000
2. A. CLARK, Elementos de álgebra abstracta, Alhambra, 1974
3. K. SPINDLER, Abstract Algebra with Applications, Vol. II, Rings and Fields, Marcel Dekker, Inc., New York, 1994
4. I. STEWART, Galois Theory, Chapman and Hall, 1973
5. F. ZALDIVAR, Teoría de Galois, Anrhopos, Barcelona, 1996

### **Bibliografía Complementaria**

1. P.M. COHN, Algebra, Vol. 1, Wiley, New York, 1974
2. P.M. COHN, Algebra, Vol. 2, Wiley, 1975
3. H.S. EDWARDS, Galois Theory, Springer-Verlag, 1984
4. L. GAAL, Classical Galois Theory, Chelsea, London, 1979
5. T.V. HUNDERFORD, Algebra, Springer, Berlin, 1974
6. N. JACOBSON, Basic Algebra I, Freeman, Boston, 1974
7. N. JACOBSON, Lectures in Abstract Algebra III, Springer, New York, 1975
8. S. LANG, Algebra, Aguilar, Madrid, 1971
9. P.J. McCARTHY, Algebraic extensions of fields, Chelsea, 1976