Ecuaciones Algebraicas. Curso 2006/7. Hoja de problemas 9.

1. Para cada uno de los siguiente polinomios y los siguientes cuerpos decidir qué polinomios son separables sobre qué cuerpos. Polinomios: X^3+1, X^4+2X-1 y $X^3-21X^2+147X-343$ sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_7$.

2. Decidir sobre la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, demostrando las verdaderas y dando un contraejemplo de las falsas.

   (a) Todo polinomio irreducible de $K[X]$ es separable.

   (b) Toda extensión separable en normal.

   (c) Toda extensión normal es separable.

   (d) Toda extensión de cuerpos finitos es separable.

   (e) Toda extensión finita es separable.

   (f) Si la característica de K no divide al grado de la extensión L/K, entonces la extensión L/K es separable.

   (g) Si $p \in K[X]$ tiene grado n, L es un cuerpo de escisión de p sobre K y la característica de K no divide a n, entonces L/K es separable.

   (h) Si $p \in K[X]$ tiene grado n, L es un cuerpo de escisión de p sobre K y la característica de K no divide a $n!$, entonces L/K es separable.

   (i) Si $p \in K[X]$ es separable sobre K entonces el cuerpo de escisión de p sobre K es normal sobre K.

3. Construir una extensión finita que no sea simple. (Indicación: $\mathbb{F}_p(X,Y)/?$.)

4. Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$ y sea f un polinomio irreducible de $K[X]$. Demostrar:

   (a) f tiene una raíz múltiple (en una extensión de K) si y sólo si $f' = 0$ si y sólo si $f \in K[X^p]$.

   (b) Si $f = g(X^{p^n})$ con $g \in K[X]$ y $g' \neq 0$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son las raíces de f, entonces las raíces de g son $\alpha_1^{p^n}, \dots, \alpha_k^{p^n}$.

   (c) Si $f \in K[X^{p^n}] \setminus K[X^{p^{n-1}}]$ entonces todas las raíces de f tienen multiplicidad p^n.

   (d) Si α es una raíz de f, entonces $[K(\alpha):K]_s$ divide a $[K(\alpha):K]$ y $\frac{[K(\alpha):K]}{[K(\alpha):K]_s}$ es una potencia de p.

5. Demostrar que si E/K es una extensión finita entonces $[E:K]_s$ divide a $[E:K]$. (Indicación: Utilizar el Ejercicio 4 y razonar por inducción).

6. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes para un cuerpo K.

   (a) Todo polinomio irreducible en $K[X]$ es separable.

   (b) Toda extensión algebraica de K es separable.

   (c) $\mathrm{car} K = 0$ ó $\mathrm{car} K = p \neq 0$ y $K = K^p$.

   Un cuerpo que satisface estas condiciones se dice que es *perfecto*.

7. Demostrar:

   (a) Todo cuerpo finito es perfecto.

(b) Si K es perfecto y L/K es una extensión algebraica, entonces L es perfecto.

(c) Si L es perfecto y L/K es una extensión separable, entonces K es perfecto.

(d) Si L es perfecto y L/K es una extensión finita, entonces K es perfecto.

8. Demostrar que el cuerpo de fracciones $K(X)$ del anillo de polinomios $K[X]$ es perfecto si y sólo si $\mathrm{car}K = 0$.

9. Sea K un cuerpo de característica p y $\overline{K}$ una clausura algebraica de K. Sea

$$\sqrt[p]{K} = \{x \in \overline{K} : x^p \in K\}.$$

Demostrar que

$$K \subseteq \sqrt[p]{K} \subseteq \sqrt[p^2]{K} \subseteq \dots$$

es una sucesión de subextensiones de $\overline{K}/K$ y que la unión de estos subcuerpos es la menor subextensión de $\overline{K}/K$ que es un cuerpo perfecto. Esta unión se llama *clausura perfecta* de K.

10. Dados dos números racionales a y b, encontrar un elemento primitivo de $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ sobre $\mathbb{Q}$.

11. Encontrar un elemento primitivo de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

12. Sea L/K una extensión separable de grado n y sea $\alpha \in L$. Demostrar que α es un elemento primitivo de L/K si y sólo si α tiene n conjugados.

13. Demostrar que si K un cuerpo de característica $p \neq 0$ y X e Y son dos indeterminadas, entonces la extensión $K(\sqrt[p]{X}, \sqrt[p]{Y})/K(X,Y)$ tiene infinitas subextensiones pero no es simple.

14. Sea $K = \mathbb{F}_2(T)$ el cuerpo de funciones racionales sobre el cuerpo con dos elementos $\mathbb{F}_2$, en la variable T y sean $F = X^2 - T$ y $G = X^2 - (T^2 + T^3)$ y α y β raíces de F y G en una extensión de K. Demostrar que $K(\alpha, \beta)/K$ es una extensión de grado 4 que no es simple.

15. Sea $p \in K[X]$ de grado n. Demostrar que si la característica de K no divide a $n!$ entonces p es separable sobre K.