

Ecuaciones Algebraicas. Curso 2006/7. Hoja de problema de los capítulos 13 y 14.

1. Sea L/K una extensión de Galois finita. Demostrar
 - (a) Si $[L : K]$ es potencia de un primo, entonces L está contenido en una extensión radical de K .
 - (b) Si para cada dos subcuerpos intermedios $E, F \in \text{Sub}(L/K)$ se verifica que $E \subseteq F$ ó $F \subseteq E$ entonces L está contenido en una extensión radical de K .
2. Sea $p \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado 3 y L el cuerpo de descomposición de p sobre \mathbb{Q} .
 - (a) Demostrar que $\text{Gal}(L/K)$ es cíclico de orden 3 o isomorfo a S_3 .
 - (b) Demostrar que L está contenido en una extensión radical R de K .
 - (c) Demostrar que si $R \subseteq \mathbb{R}$, entonces R/K no es normal.
 - (d) Demostrar que si $L \subseteq \mathbb{R}$, entonces L/K no es radical.
 - (e) Dar un ejemplo de una extensión L/K que no sea radical pero que esté contenida en una extensión radical de K .
3. Sean K un subcuerpo de los números reales, $p \in K[X]$ irreducible de grado 3. Demostrar que el discriminante de p es negativo si y sólo si p tiene una única raíz real y que en caso contrario p tiene 3 raíces reales.
4. Demostrar que para todo cuerpo K el polinomio $X^3 - 3X + 1$ es irreducible o se descompone completamente en K .
5. Sean K un cuerpo de característica diferente de 2 y $p \in K[X]$ un polinomio separable irreducible con discriminante D tal que $\text{Gal}(f/K)$ es cíclico. Demostrar que $\sqrt{D} \in K$ si y sólo si $|\text{Gal}(p, K)|$ es impar.
6. Sea L el cuerpo de descomposición de $X^3 - X + 1$ sobre \mathbb{Q} . Hacer un diagrama de los subcuerpos de L y describir el grupo de Galois de L sobre cada uno de estos cuerpos.
7. Sea L el cuerpo de descomposición de un polinomio irreducible de grado 3 sobre un cuerpo K de característica 0. Demostrar que L/K tiene tres o ninguna subextensión de grado 2.
8. Sean K un cuerpo de característica 0, $f \in K[X]$ irreducible de grado 4, L el cuerpo de descomposición de f sobre K , F el cuerpo de descomposición de la resolvente cúbica de f sobre K , $m = [F : K]$ y $G = \text{Gal}(L/K)$. Demostrar
 - (a) $m = 1, 2, 3$ ó 6 .
 - (b) Si $m = 6$, entonces $G \simeq S_4$.
 - (c) Si $m = 3$, entonces $G \simeq A_4$.
 - (d) Si $m = 1$, entonces $G \simeq C_2 \times C_2$ (el producto directo de dos grupos cíclicos de orden 2).
 - (e) Si $m = 2$ y f es irreducible sobre F , entonces $G \simeq D_4$, el grupo diédrico de orden 8.
 - (f) Si $m = 2$ y f es reducible sobre F , entonces G es cíclico de orden 4.
9. Demostrar que si K es un subcuerpo del cuerpo de los números reales, $p \in K[X]$ es irreducible de grado 4 y p tiene exactamente dos raíces reales entonces $\text{Gal}(f/K) \simeq S_4$ ó D_4 .
10. Sean K un cuerpo de característica cero, $p = X^4 + aX^2 + b \in K[X]$ irreducible y $G = \text{Gal}(p/K)$. Demostrar

- (a) Si b es un cuadrado en K , entonces $G \simeq C_2 \times C_2$.
- (b) Si b no es un cuadrado en K pero $b(a^2 - 4b)$ es un cuadrado en K , entonces G es cíclico de orden 4.
- (c) Si ninguna de las dos condiciones anteriores se verifica entonces $G \simeq D_4$.
11. Sean K un cuerpo de característica cero, $p = X^4 + bX^3 + cX^2 + bX + 1 \in K[X]$ irreducible, $G = \text{Gal}(p/K)$, $\alpha = c^2 + 4c + 4 - 4b$ y $\beta = b^2 - 4c + 8$. Demostrar
- (a) Si α es un cuadrado en K , entonces $G \simeq C_2 \times C_2$.
- (b) Si α no es un cuadrado en K pero $\alpha\beta$ es un cuadrado en K , entonces G es cíclico de orden 4.
- (c) Si ninguna de las dos condiciones anteriores se verifica, entonces $G \simeq D_4$.
12. Determinar el grupo de Galois del polinomio $X^4 - 5$ sobre cada uno de los siguientes cuerpos: \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ y $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$.
13. Determinar el grupo de Galois sobre los cuerpos indicados de cada uno de los siguientes polinomios:
- (a) $X^4 + 6X^2 + 9$, $X^4 - 4X^2 + 2$, $X^5 + 4X^3 + X$, $X^4 + X^2 - 6$, $X^4 - 4X^2 + 16$, $X^4 - X^2 - 2$, $X^6 - 9$, $4X^4 - 8X^2 + 1$ y $X^5 - 3x^3 - 2X^2 + 6$ sobre \mathbb{Q}
- (b) $X^3 + 2X + 2$ sobre \mathbb{Z}_3 , $X^3 - 10$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $X^4 - 5$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ y $X^4 - 2$ sobre $\mathbb{Q}(i)$.
14. Demostrar que el discriminante del polinomio $p = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ es
- $$D = a^2b^2c^2 - 4b^3c^2 - 4a^3c^3 + 18abc^3 - 27c^4 - 4a^2b^3d + 16b^4d + 18a^3bcd - 80ab^2cd - 6a^2c^2d + 144bc^2d - 27a^4d^2 + 144a^2bd^2 - 128b^2d^2 - 192acd^2 + 256d^3$$
- y que si p es irreducible y separable sobre K entonces $\text{Gal}(p/K)$ es isomorfo a A_4 ó $C_2 \times C_2$ si y sólo si D es un cuadrado en K .
15. Sea f un polinomio separable con coeficientes reales y n el número raíces no reales de f . Demostrar que el discriminante de f es positivo si y sólo si n es múltiplo de 4. (Indicación: Obsérvese que si α y β son dos raíces de f que no son iguales ni conjugadas, entonces $(\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \in \mathbb{R}$ y que $(\alpha - \bar{\alpha})^2 < 0$.)
16. Sean $p = \sum_{i=1}^n p_i X^i$ y $q = \sum_{i=1}^n q_i X^i$ dos polinomios de grado n tales que $q_i = p_{n-i}$ para todo i . Demostrar que p es resoluble por radicales si y sólo si lo es q .
17. Sea $f \in K[X]$ con K un cuerpo de característica 0. Demostrar que si f es resoluble por radicales sobre K entonces existen números primos p_1, \dots, p_k , una torre de cuerpos $K = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_{k-1} \subseteq E_k = L$ y elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tales que f factoriza completamente en L , $E_i = E_{i-1}(\alpha_i)$ y $\alpha_i^{p_i} \in E_{i-1}$, para todo $i \geq 1$.
18. Sean $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$ y $\alpha = \sqrt{3}\sqrt[3]{5}$.
- (a) Demostrar que $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ y calcular $p = \text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$.
- (b) Calcular $\text{Gal}(p/\mathbb{Q})$.
- (c) ¿Es p resoluble por radicales sobre \mathbb{Q} ?
19. Decidir sobre la resolubilidad por radicales sobre \mathbb{Q} de los siguientes polinomios: $2X^5 - 3X + 1$, $X^5 - 10X^4 + 40X^3 - 80X^2 + 80X - 39$, $X^5 - 3X^2 + 1$, $X^5 - 2X^2 + 1$.
20. Sean n y m dos enteros positivos tales que $5^5 m < 4 \cdot 3^3 n$. Demostrar que el polinomio $X^5 - nX^3 + m$ no es resoluble por radicales sobre \mathbb{Q} .