Ecuaciones Algebraicas. Curso 2006/7. Hoja de problemas 12.

1. Demostrar que la traza de la extensión $K(\sqrt{X})/K = \mathbb{F}_2(X)$ es idénticamente nula.

2. Sea $\xi = \xi_p \in \mathbb{C}$ una raíz p-ésima primitiva de la unidad con p primo. Demostrar que si $a_0, a_1, \dots, a_{p-2} \in \mathbb{Q}$, entonces
$$T_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}(\xi)}\left(\sum_{i=0}^{p-2} a_i \xi^i\right) = (p-1)a_0 + \sum_{i=1}^{p-2} a_i.$$

3. Decir cuáles de las siguientes extensiones son cíclicas.
   (a) L/K, donde L es el cuerpo de descomposición de $X^p - 1$ sobre K para un primo p.
   (b) Una extensión de grupos finitos.
   (c) $\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}$, donde ξ_n es una raíz finita de la unidad para cada uno de los números $n \leq 25$.
   (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
   (e) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$
   (f) El cuerpo de descomposición de $X^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_5$.

4. Sea L/K una extensión cíclica de cuerpos de característica $p \neq 0$ y sea σ un generador de L/K. Demostrar que para todo elemento $\beta \in L$ tal que $T_K^L(\beta) = 0$ existe $\alpha \in L$ tal que $\sigma(\alpha) - \alpha = \beta^p - \beta$.

5. Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$ y $f = X^p - X - a$ con $a \in K$. Demostrar:
   (a) Si α es una raíz de f, entonces $\alpha + 1$ también es raíz de f.
   (b) f es o irreducible o completamente indescomponible sobre K.
   (c) Si f es irreducible sobre K y α es una raíz de f es una extensión de K, entonces $K(\alpha)/K$ es una extensión cíclica.
   (d) (Teorema de Artin-Schreier) Si L/K es una extensión cíclica de grado p, entonces existen $a \in K$ y una raíz α de $f = X^p - X - a$ tal que $L = K(\alpha)$. En tal caso L/K es el cuerpo de descomposición de f sobre K.

6. Sea K un cuerpo que contiene una raíz n-ésima primitiva de la unidad y L/K una extensión cíclica de grado n. Demostrar que si $L = K(\beta_1) = K(\beta_2)$ con $\beta_i^n \in K$, entonces existe un entero m, coprimo con n tal que $\beta_2 \beta_1^m \in K$.

7. Sea L/K una extensión cíclica de grado p de cuerpos de característica p. Demostrar que si $L = K(\beta_1) = K(\beta_2)$ con $\beta_i^p - \beta_i \in K$, entonces existe un entero $0 < m < p$ tal que $\beta_2 - m\beta_1 \in K$.

8. Demostrar que si L/K es una extensión cíclica de grado p^n con p primo y E/K es una subextensión de grado p^{n-1} de L/K entonces $L = K(\alpha)$ para todo $\alpha \in L \setminus E$.

9. Sea L/K una extensión cíclica de grado p^n de cuerpos de característica p, sea σ un generador de $\mathrm{Gal}(L/K)$ y sea E/K una subextensión de grado p de L/K. Demostrar que existen $a \in E$ y $\beta \in L \setminus E$ tales que:
   (a) $\beta^p - \beta = a$
   (b) $L = K(\beta)$.
   (c) $\sigma^{p^{n-1}}(\beta) = \beta + 1$.
   (d) $\alpha^p - \alpha = \sigma(a) - a$, para $\alpha = \sigma(\beta) - \beta$.