Olimpiada de Física de la Región de Murcia 2005

Fase local de la XVI Olimpiada Española de Física

25 de febrero de 2005

RESOLUCIONES

Cuestión 1

Una carga positiva se encuentra inicialmente en reposo en el origen de un sistema de coordenadas. En esa región del espacio actúa un campo magnético dirigido a lo largo del eje Z y un campo eléctrico dirigido a lo largo del eje Y. Cuando se deja suelta la carga, ésta se moverá:

(a) A lo largo del eje Y.
(b) A lo largo del eje X.
(c) En el plano XY.
(d) En el plano YZ.
(e) En el plano ZX.
Justifica tu respuesta.

La fuerza que un campo eléctrico $\vec{E}$ ejerce sobre una carga q es $\vec{F}_{\text{eléct}} = q\vec{E}$; campo y fuerza tienen el mismo sentido, si la carga es positiva, o sentido opuesto, si la carga es negativa. La fuerza produce una aceleración sobre la carga, que estaba en reposo, y como ésta es una carga positiva comienza a moverse a lo largo del eje Y en sentido positivo.

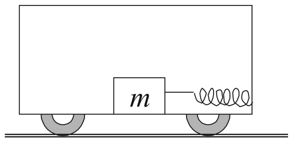
La fuerza que ejerce un campo magnético $\vec{B}$ sobre una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ es $\vec{F}_{\text{magnét}} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Esta fuerza desvía la carga de la trayectoria rectilínea que seguiría si sólo actuase el campo eléctrico, siendo su movimiento perpendicular a la velocidad de la carga y al campo magnético. Como la carga ha adquirido velocidad a lo largo del eje Y y el campo magnético está dirigido a lo largo del eje Z, la fuerza magnética está dirigida a lo largo del eje X.

En definitiva, la combinación de las fuerzas debidas al campo eléctrico y al campo magnético da lugar a una fuerza que sólo tiene componentes a lo largo de los ejes X e Y, por lo tanto el movimiento que efectuará la carga estará restringido al plano XY. La respuesta correcta es la correspondiente al apartado (c).

Cuestión 2

Un cuerpo de masa m se encuentra en el interior de un vagón en movimiento, unido a una pared del mismo mediante un muelle de constante elástica k. Entre el cuerpo y el suelo del vagón no hay rozamiento. Si se observa que el muelle tiene una elongación constante x hacia la izquierda, se puede deducir que el vagón tiene:

(a) Velocidad constante $v = x\sqrt{k/m}$ hacia la derecha.
(b) Velocidad constante $v = x\sqrt{k/m}$ hacia la izquierda.
(c) Aceleración constante $a = xk/m$ hacia la derecha.
(d) Aceleración constante $a = xk/m$ hacia la izquierda.
(e) Ninguno de los cuatro casos es cierto.
(f) Los cuatro casos son ciertos.
Justifica tu respuesta.



De acuerdo con la segunda ley de Newton de la dinámica, un observador situado fuera del vagón describirá el movimiento de la masa m empleando la expresión[1]

$$\sum_i F_i = ma, \tag{1}$$

donde F_i son las fuerzas que actúan sobre la masa y a es su aceleración. La única fuerza sobre la masa m es la fuerza horizontal, ejercida por el muelle de constante elástica k, y está dada por la ley de Hooke $F_{\text{elást}} = -kx$ (de sentido contrario a la elongación x). Así pues, la ecuación (1) se convierte en

$$-kx = ma.$$

De aquí se obtiene que la aceleración del vagón vale

$$a = -xk/m. \tag{2}$$

Como vemos, la aceleración tiene sentido contrario al de la elongación y es constante como ésta, por lo tanto, la respuesta correcta es la (c): $a = xk/m$ hacia la derecha.

[1] Aunque la segunda ley de Newton tiene carácter vectorial, $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$, la escribimos en forma escalar porque sólo intervienen componentes horizontales, ya que las fuerzas verticales (peso y normal del suelo) se cancelan.

También puede explicarse lo que le sucede a la masa unida al muelle haciendo la descripción desde dentro del vagón en movimiento. Como en estas condiciones no se es consciente de estar en movimiento ($a = 0$, en la descripción desde del interior del vagón), y se observa que la masa m está en equilibrio, puede escribirse la segunda ley de Newton, ecuación (1), como

$$\sum_i F_i = 0. \tag{3}$$

Pero dentro del vagón no hay ningún objeto que ejerza sobre la masa una fuerza horizontal capaz de contrarrestar la fuerza elástica $F = -kx$ ejercida por el muelle. Para poder aplicar la segunda ley de Newton se introducen fuerzas ficticias o inerciales (en sistemas de referencia acelerados –no inerciales–); la fuerza ficticia es proporcional a la masa m del objeto al cual se le aplica la ley de Newton y a la aceleración a del sistema de referencia desde el cual se realiza la descripción: $F_{\text{fict}} = -ma$. Por lo tanto, la ecuación (3) se escribirá como

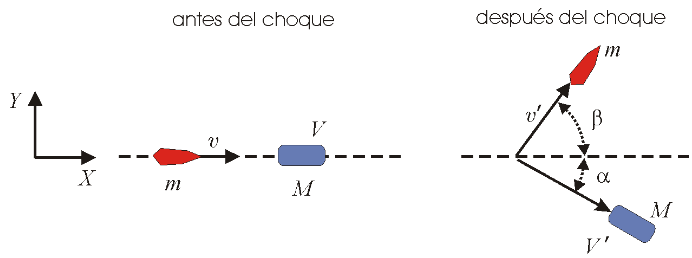
$$F_{\text{elást}} + F_{\text{fict}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -kx - ma = 0,$$

de donde se obtiene que $a = -kx/m$, expresión idéntica a la ecuación (2), como era de esperar.

Cuestión 3

Un policía presenta el siguiente informe acerca de un accidente de tráfico: “Un coche deportivo, de 1000 kg de masa, chocó con una furgoneta, de 1500 kg de masa, que estaba aparcada. A partir de la marca dejada por los neumáticos, se estimó que la velocidad de la furgoneta inmediatamente después de la colisión fue de $21{,}6$ m/s, formando un ángulo de $33{,}7^{\rm o}$ con la dirección de la carretera. El coche deportivo dejó una marca formando un ángulo de $60^{\rm o}$ con la carretera, pero no frenó, abandonando el lugar del accidente”. A partir de estos datos, ¿puede un experto determinar a qué velocidad iba el coche deportivo? Justifica tu respuesta.

En la figura adjunta aparece un esquema de los vehículos, antes y después del choque. Se conocen los siguientes datos: las masas del coche deportivo ($m = 1000$ kg) y de la furgoneta ($M = 1500$ kg); la velocidad de la furgoneta antes ($V = 0$) y después ($V' = 21{,}6$ m/s) del choque, y los ángulos respecto a la dirección inicial formados por la furgoneta y el coche deportivo tras el choque, $\alpha = 33{,}7^{\rm o}$ y $\beta = 60^{\rm o}$, respectivamente. ¿Es posible calcular v con los datos disponibles?



Aplicamos la conservación del momento lineal antes y después del choque ($\vec{p}_{\rm ini} = \vec{p}_{\rm fin}$):

$$\begin{aligned} \text{eje } X: \quad mv + MV &= mv'\cos\beta + MV'\cos\alpha, \\ \text{eje } Y: \quad 0 &= mv'\sin\beta - MV'\sin\alpha. \end{aligned}$$

Si recordamos que $V = 0$, la primera ecuación se simplifica y tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (v y v'):

$$\begin{aligned} \text{eje } X: \quad mv &= mv'\cos\beta + MV'\cos\alpha, \\ \text{eje } Y: \quad 0 &= mv'\sin\beta - MV'\sin\alpha, \end{aligned}$$

donde las restantes variables que aparecen (m, M, V', α y β) son conocidas.

En estas condiciones, una persona que sepa física **sí** puede determinar la velocidad v a la que iba el coche deportivo, que se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$v = (\sin\alpha\cot\beta + \cos\alpha)\frac{M}{m}V'.$$

La respuesta a la cuestión ya se ha dado afirmativamente. Aunque no se pide el valor de la velocidad inicial del coche deportivo, sustituyendo valores en la ecuación anterior se obtiene que $v = 37{,}33$ m/s $= 134{,}40$ km/h; es decir, iba más rápido que lo permitido por la ley (que es 120 km/h en autopista).

SOLUCIONES CUESTIONES 4, 5 Y 6

4. Colgamos un hilo de longitud *l* en el techo de una cabina de un ascensor. En el extremo del hilo colocamos una bolita de masa *m* y la hacemos oscilar de forma armónica. Determina la expresión del período del péndulo si el ascensor sube con una aceleración *a*.

En condiciones normales, con el ascensor parado, el período de oscilación armónica del péndulo es $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Cuando el ascenso sube con aceleración *a* consideraremos, además de la fuerza peso, una fuerza ficticia en la dirección contraria al movimiento (es decir, hacia abajo), de forma que la resultante es $m(g+a)$. El período del péndulo sería $T = 2\pi\sqrt{l/(g+a)}$.

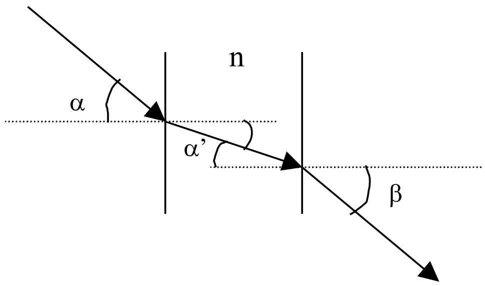
Si el ascensor baja en lugar de subir, el período es $T = 2\pi\sqrt{l/(g-a)}$; en caída libre, $a = g$ y no hay oscilación.

5. Las distancias medias del Sol a la Tierra y del Sol a Saturno son 1,49·10^8 km y 1,43·10^9 km, respectivamente. ¿Cuánta energía solar recibe más nuestro planeta que Saturno?

La energía viene del Sol en forma de ondas electromagnéticas esféricas y, por eso, la energía por unidad de área que, en un tiempo dado, llega a una región que está a una distancia *d* del Sol es inversamente proporcional a d^2 . La respuesta es que la energía por unidad de área que recibe la Tierra es $(14{,}3/1{,}49)^2$ =92,1 veces mayor que la que recibe Saturno.

Sin embargo, contando toda su superficie, la energía total que reciben los dos planetas es parecida, debido a que el diámetro de Saturno es unas 9 veces mayor que el de la Tierra (un factor similar al cociente de distancias al Sol).

6. Un rayo de luz incide sobre un cristal, de superficies perfectamente planas e índice de refracción *n*, con un ángulo α respecto a la perpendicular al cristal. Halla el ángulo con que saldrá el rayo del cristal tras atravesarlo.



$$sen\alpha = n\,sen\alpha' = sen\beta$$
$$\alpha = \beta$$

El rayo emerge con el mismo ángulo, respecto a la perpendicular, que entró, aunque en una posición diferente. La dirección de los rayos inicial y final son paralelas, tanto más separadas cuanto más grueso sea el cristal.

Problema 1

Un perro salta horizontalmente con velocidad $v_0 = 32$ km/h al interior de un trineo sobre hielo, que estaba en reposo. La masa del perro es 14 kg y la del trineo más su conductora es 160 kg. Suponiendo que la superficie del hielo carece de fricción, calcula:

(a) La velocidad del trineo después de que el perro se incorpore.

(b) El cociente entre la energía perdida y la energía inicial.

(c) La velocidad del trineo tras incorporarse el perro si el trineo hubiese estado desplazándose inicialmente hacia el perro también a 32 km/h.

Datos

Perro: $m = 14$ kg, $v_0 = 32$ km/h $= 8{,}89$ m/s

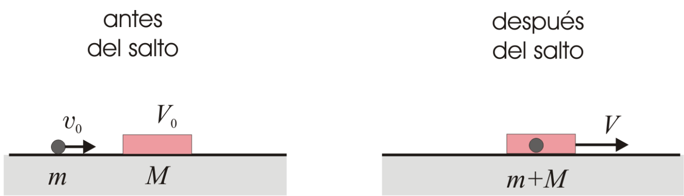
Trineo y conductora: $M = 160$ kg, $V_0 = 0$ km/h $= 0$ m/s

Incógnitas:

(a) ¿V?

(b) ¿$\dfrac{\Delta E}{E_0} = \dfrac{E_{\text{fin}} - E_0}{E_0}$?

(c) Si $V_0 = -32$ km/h $= -v_0$, ¿V?



Las masas del perro y del trineo (con su conductora) permanecen unidas después del choque, por lo tanto, se trata de un choque inelástico.

(a) Aplicaremos conservación del momento lineal antes y después del choque. Como todo el proceso transcurre a lo largo del eje X, sólo consideramos la componente horizontal del momento lineal:

$$mv_0 + MV_0 = (m + M)V \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que $V_0 = 0$, se obtiene que:

$$V = \frac{m}{m + M} v_0 \tag{2}$$

y, sustituyendo los valores numéricos, resulta:

$$V = \frac{14}{14 + 160} 8{,}89 = 0{,}715 \text{ m/s} = 2{,}57 \text{ km/h} \tag{3}$$

(b) La energía cinética antes del choque es:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \tag{4}$$

La energía cinética después del choque vale:

$$E_{\text{fin}} = \frac{1}{2}(m+M)V^2, \tag{5}$$

Al emplear la expresión de V dada por la ecuación (2), la expresión anterior se convierte en

$$E_{\text{fin}} = \frac{1}{2}(m+M)\left[\frac{m}{m+M}v_0\right]^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_0^2. \tag{6}$$

La diferencia de energía cinética entre las situaciones final e inicial es:

$$\Delta E = E_{\text{fin}} - E_0 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{-M}{m+M}\right). \tag{7}$$

Por lo tanto

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{-M}{m+M} = -0{,}92. \tag{8}$$

El signo negativo indica que se ha perdido energía cinética tras el choque. Esta energía perdida se habrá invertido en trabajo de fricción y en amortiguar la incorporación del perro al trineo (modificando internamente su estructura interna y, con ello, su energía elástica).

(c) Ahora se trata simplemente de repetir los cálculos del apartado (a), pero empleando $V_0 = -v_0$ en lugar de $V_0 = 0$. De la ecuación (1) se obtiene:

$$V = \frac{mv_0 + MV_0}{m+M}. \tag{9}$$

Teniendo en cuenta que $V_0 = -v_0$, resulta:

$$V = \frac{m-M}{m+M}v_0, \tag{10}$$

y, sustituyendo los valores numéricos, se obtiene:

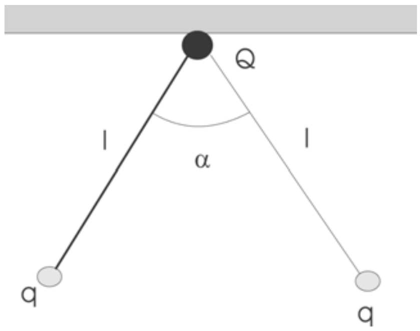
$$V = \frac{14-160}{14+160}8{,}89 = -7{,}46 \text{ m/s} = -26{,}85 \text{ km/h}. \tag{11}$$

Como se puede apreciar, tras incorporarse el perro al trineo, este último sigue moviéndose en el mismo sentido que tenía inicialmente ($V_0, V < 0$), pero con menor velocidad.

SOLUCIONES PROBLEMA 2

2. Dos esferitas iguales, de masa *m* y cargadas con una carga *q*, están suspendidas de un mismo punto por sendos hilos de longitud *l*. En el punto de suspensión se encuentra una carga *Q*. La carga de las esferitas es tal que el conjunto se encuentra en equilibrio formando los hilos un ángulo α.

a) **Determina la carga *q* de las esferitas cuando *Q* = 0.**
b) **Demuestra que si $Q \neq 0$, el valor de *q* es el mismo que antes.**
c) **¿En qué condiciones deja de ser cierto el apartado anterior y debe tenerse en cuenta la presencia de la carga *Q*?**



Sobre cualquiera de las esferitas actúan las siguientes fuerzas:
- El peso *P*, en la dirección vertical
- La fuerza F_q de repulsión coulombiana ejercida por la otra esferita, en dirección horizontal.
- La tensión *T* del hilo, en la dirección del hilo.
- La fuerza de repulsión/atracción (dependiendo del signo de *Q*) ejercida por la carga Q, en la dirección del hilo.

Como el sistema está en equilibrio, la fuerza neta sobre la esferita es nula y, por tanto:

$$\begin{matrix} (T \pm F_Q) sen\alpha/2 = F_q \\ (T \pm F_Q) \cos\alpha/2 = P \end{matrix}$$

. El signo negativo indica que *Q* tiene el mismo signo que *q* (repulsión).

Dividiendo ambas ecuaciones se obtiene: $tg\alpha/2 = F_q/P$. Como $F_q = K\dfrac{q^2}{d^2}$, donde *K* es la constante de Coulomb y $d = 2l\, sen\alpha/2$, y $P = mg$, resulta finalmente:

$$q^2 = (4mgl^2/K)\cdot sen^2\alpha/2 \cdot tg\alpha/2$$

En la solución se comprueba que el resultado es independiente del valor de la carga *Q* fijada en el punto de suspensión. El valor de dicha carga sólo afectará al valor de la tensión del hilo. Si *Q* fuera de distinto signo que *q* (atracción), podría que la componente vertical de la fuerza de atracción fuese mayor que el peso haciendo la tensión del hilo nula, acortándose la distancia entre *Q* y *q* hasta una nueva posición de equilibrio con las esferitas flotando. En este caso habría que considerar el valor de *Q* y el apartado b) sería falso.

SOLUCIONES PROBLEMA 3

3. **Saturno y la misión Cassini-Huygens. El planeta Saturno (el “señor de los anillos” del sistema solar) despierta gran interés científico, por sus anillos, su gran cantidad de satélites naturales, su atmósfera... Su masa es M = 5 684,6·10^{23} kg y está a más de 1 400 millones de km del Sol.**

a) **Calcula el valor de la constante G de gravitación universal (con sus unidades) a partir de los valores indicados en la tabla para el radio medio (R) y el período (T) de la órbita de algunas lunas de Saturno. Utiliza el siguiente procedimiento: Transforma la 3ª ley de Kepler para obtener una relación lineal $y = m \cdot x$. La constante G se despejará de la pendiente $m = G \cdot M/4\pi^2$. Para hallar la pendiente de la recta, utiliza dos parejas de puntos de la tabla calculando un primer valor de G a partir de los datos de Titán e Hiperión y un segundo valor utilizando los datos de Rea y Calipso. El valor final de G será la media de los dos valores obtenidos.**

	R (miles de km)	T (días)	$y = R^3$ (m^3)	$x = T^2$ (s^2)	m (m^3/ s^2)	G	G (Nm^2/kg^2)
Titán	**1221,85**	**15,95**	1,824·10^{27}	1,899·10^{12}			
Hiperión	**1481,10**	**21,28**	3,249·10^{27}	3,380·10^{12}	0,962·10^{15}	6,68·10^{-11}	
Rea	**527,04**	**4,52**	1,464·10^{26}	1,525·10^{11}	0,959·10^{15}		
Calipso	**294,66**	**1,89**	2,558·10^{25}	2,666·10^{10}		6,66·10^{-11}	6,67·10^{-11}

b) **La nave espacial Cassini-Huygens, de unos 6 000 kg de masa, fue lanzada en octubre de 1997 en una misión para estudiar el entorno de Saturno, y llegó a su destino tras un viaje de 6,7 años en el que siguió una trayectoria complicada aprovechando impulsos gravitacionales de varios planetas (Venus, por dos veces, la Tierra y Júpiter). Estos impulsos, llamados “asistencias gravitacionales” o “*flybys*”, sirven para incrementar la velocidad y cambiar la dirección de la nave cuando ésta pasa cerca de un planeta aprovechando la atracción gravitatoria. En agosto de 1999 la nave Cassini aumentó su velocidad en 5,5 km/s mediante una asistencia gravitacional al pasar cerca de la Tierra, la cual, en consecuencia, se frenó en una cantidad pequeñísima (despreciable a efectos prácticos). Estima el orden de magnitud del cambio, ΔR , que experimentó el radio de la órbita de nuestro planeta debido a dicha asistencia gravitacional. [Indicación: Calcula primero el cambio de velocidad, Δv, que sufre la Tierra y supón, en primera aproximación, que $(\Delta v / v)^2 = \Delta R / 2R$. La masa de la Tierra es aproximadamente 6·10^{24} kg y su distancia al Sol es 1,5·10^{11} m].**

Por conservación del momento angular se obtiene que el cambio de velocidad que sufre la Tierra es $\Delta v = -m / M \cdot 5{,}5$ km/s = -5,5·10^{-18} m/s, donde m es la masa de la nave y M la de la Tierra. La variación en el radio de la órbita será $\Delta R = 2R(\Delta v / v)^2 = 2R(\Delta v /(2\pi R / T))^2 = \Delta v^2 T^2 / 2\pi^2 R$, donde T es el período orbital de la Tierra (1 año). Tras introducir valores se estima que el efecto sobre el radio de la órbita terrestre es del orden de 10^{-32} m.

c) **Uno de los objetivos de la misión Cassini-Huygens fue medir la magnitud y dirección de los vientos de Titán (la luna más grande de Saturno) mediante la sonda Huygens, que se separó de la nave Cassini y alunizó en Titán en enero de 2005. En el descenso a través de su atmósfera, el movimiento de la sonda causado por el viento cambia la frecuencia recibida debido al efecto Doppler. En la misión se pretendía medir la magnitud del viento con una precisión de 1 m/s. Determina si se pudo satisfacer dicha precisión**

sabiendo que la sonda enviaba ondas de radio de 2040 MHz con un error máximo de 0.4 Hz.

Teniendo en cuenta la expresión del efecto Doppler que da la variación de la frecuencia observada en función de la frecuencia original, la velocidad de la onda y la velocidad del emisor, podemos estimar que el error en la frecuencia, δf, de la onda y el error en la velocidad del emisor, δv, se relacionan a través de la expresión $\delta f / f = \delta v / c$, donde c es la velocidad de la onda electromagnética. Con los datos del problema, $\delta f = 0.4$ Hz y $f = 2040 \cdot 10^6$ Hz, obtenemos un error en la velocidad $\delta v = 0.059$ m/s. Este sería el error con que podría estimarse la velocidad de los vientos considerando la imprecisión de 0.4 Hz que se tiene en el control de la frecuencia que emite la sonda. Este error es menor que 1 m/s y, por tanto, sí se pudo satisfacer la precisión requerida en la misión para medir los vientos de Titán.