1ª PARTE (duración: 1 h 30 min)

1. El átomo de J.J. Thomson

Vamos a trabajar en este problema el modelo atómico de Thomson, formulado en 1904 y que fue uno de los motivos por los que se le concedió el premio Nobel de Física en el año 1906. El átomo de Thomson (conocido como el modelo del "pudín de pasas") consiste en una nube esférica uniformemente cargada con carga positiva total $+Q$ y radio R (que será el radio del átomo en este modelo). Los electrones son pequeños gránulos distribuidos por el interior de la esfera, cada uno con una carga negativa $-e$. Como el átomo es neutro, se cumple que $Q = Ze$, donde Z es el número atómico.

De momento, consideraremos solamente la esfera de carga $+Q$, sin electrones.

a) Aplicando el teorema de Gauss, calcula la expresión del campo eléctrico $E(r)$ a una distancia r del centro de la esfera:
1) En un punto situado en el exterior de la esfera, es decir, $r \geq R$.
2) En un punto interior, $r \leq R$.
3) En la superficie de la esfera, $r = R$.

Haz una gráfica representando la función $E(r)$ en todas las regiones.

b) A partir del campo eléctrico, obtén la expresión para el potencial eléctrico $V(r)$:
1) En un punto exterior a la esfera.
2) En un punto interior.
3) En la superficie de la esfera.

Ayuda: Para determinar las constantes de integración en el cálculo de $V(r)$, ten en cuenta que elegimos el origen de potencial en el infinito y que las expresiones 1) y 2) deben coincidir en $r = R$.

c) ¿Cuál es el potencial en el centro de la esfera?

Pasamos a considerar ahora un átomo de hidrógeno, con un único electrón ($Z = 1$). La posición de equilibrio de este electrón es justo el centro de la esfera cargada.

d) Se define la *energía de ionización* como la energía mínima necesaria que hay que suministrar a un electrón situado en el centro de la esfera para llevarlo hasta el infinito. Obtén la expresión para la energía de ionización del átomo de hidrógeno según el modelo de Thomson.

e) Debido a la repulsión electrostática, cada punto de la esfera positiva tendería a separarse de los demás. Por tanto, se necesita una energía para formar la esfera. Puede demostrarse que dicha energía es

$$E_{esf} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$$

para una esfera uniforme de carga Q y radio R (esta energía es igual a la energía que se liberaría si la esfera explotase y cada parte quedase a una distancia infinita del resto). Si definimos la energía total del átomo en el modelo de Thomson como la diferencia entre la energía necesaria para formar la esfera de carga positiva y la energía de ionización, obtén la expresión para la energía total del átomo de hidrógeno. Explica el significado del signo que tiene la energía total que has calculado.

f) Supón ahora que el electrón se encuentra en el interior de la esfera a una distancia $r > 0$ del centro. ¿Qué fuerza actúa sobre él?

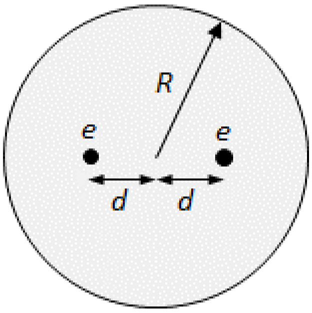
g) Basándote en la ecuación de la fuerza deducida en el apartado anterior, ¿qué tipo de movimiento experimentará el electrón en el interior de la esfera? Justifica tu respuesta.

h) Vamos a considerar que, en el modelo de Thomson, la radiación emitida por el átomo al pasar del primer estado excitado al estado fundamental se debe al movimiento del electrón descrito en el apartado anterior. Calcula el valor numérico del radio del átomo de hidrógeno. Datos: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, $K = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9{,}0 \times 10^{9}$ Nm^{2}C^{-2}, masa del electrón $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg, frecuencia de la radiación $f = 2{,}47 \times 10^{15}$ Hz (ayuda: la frecuencia angular es $\omega = 2\pi f$).

Finalmente, consideramos un átomo de helio con dos electrones ($Z = 2$).

i) Teniendo en cuenta que la densidad de carga del átomo de helio es la misma que la del átomo de hidrógeno, ¿cuál es la relación entre el radio de los dos átomos?

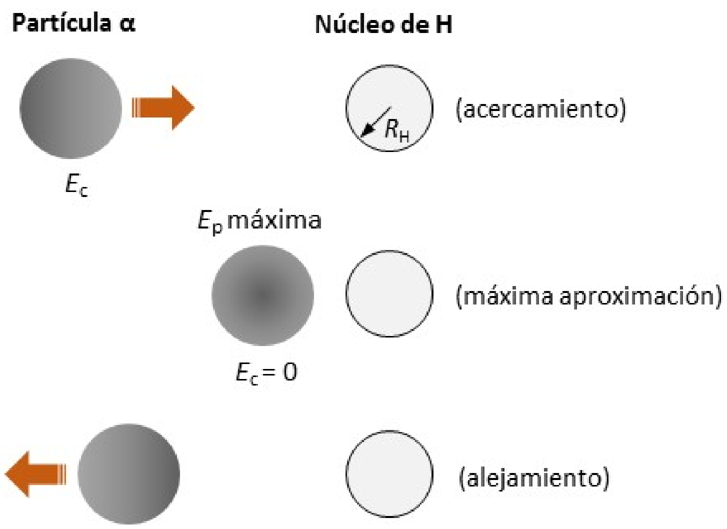
j) La posición de equilibrio de los electrones en el helio es la que se indica en la figura, con ambos electrones a una distancia d del centro del átomo. Calcula la distancia d.



2. El átomo de Rutherford

El modelo de Thomson tuvo un gran éxito durante varios años, pues explicaba algunos hechos experimentales conocidos para el átomo de hidrógeno. Pero en el año 1909, Rutherford (discípulo de Thomson) junto con Geiger y Marsden llevaron a cabo el bombardeo de láminas de oro con partículas alfa (núcleos de helio, ${}_{2}^{4}He^{+2}$), y se dieron cuenta que el modelo de Thomson explicaba bien las deflexiones a ángulos pequeños pero no las que ocurrían a ángulos mayores. Esto llevó a Rutherford a proponer un nuevo modelo atómico, conocido como el "modelo planetario", donde se compara al Sol con el núcleo del átomo y los electrones con los planetas, y, al igual que en un sistema planetario la fuerza gravitatoria es conservativa, la fuerza eléctrica que es la única que actúa entre el núcleo y el electrón es también conservativa. Vamos a ver ahora algunas características que podemos obtener fácilmente del modelo atómico de Rutherford y que no aparecían en el modelo de Thomson, ya que éste no incluía un núcleo donde estuviera concentrada la carga positiva.

a) El siguiente dibujo muestra la colisión de una partícula alfa con un núcleo de hidrógeno (éste contiene sólo un protón). Utilizando el principio de conservación de la energía, calcula el valor máximo que tendría el radio del núcleo de hidrógeno según el modelo de Rutherford. Datos: masa de la partícula alfa $m_\alpha = 6{,}645 \times 10^{-27}$ kg, velocidad de la partícula alfa $v_\alpha = 1{,}5 \times 10^{7}$ m/s, $K = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9{,}0 \times 10^{9}$ $\mathrm{Nm^2C^{-2}}$, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

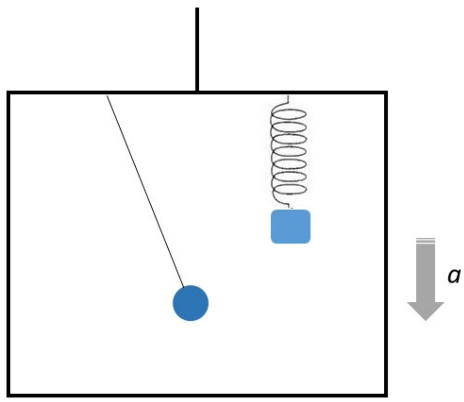


b) En 2010 la revista Science publicó un artículo en que se podía leer que estaba resuelto el problema del radio del protón, al haberse medido experimentalmente por el desplazamiento Lamb para un átomo de hidrógeno obteniéndose un valor de $r_{\exp} = 0{,}841$ fm. ¿Qué error hemos cometido al calcular teóricamente el radio del protón mediante el modelo de Rutherford con respecto al valor experimental dado en 2010? Dato: $1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}$ m.

c) Sabemos que la masa de un núcleo, $m_{núcleo}$, es proporcional a su número másico A (el número de protones más el de neutrones) y que su radio, $r_{núcleo}$, es proporcional a la raíz cúbica de A. Concretamente, utilizaremos para este apartado las expresiones $m_{núcleo} = (1{,}66 \times 10^{-27}) \cdot A$ kg y $r_{núcleo} = 1{,}2\sqrt[3]{A}$ fm. Suponemos que el núcleo es esférico. Calcula la densidad del núcleo en el S.I. ¿Cuántas veces es mayor que la densidad del agua ($\rho_{agua} = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$)? Explica brevemente si todos los núcleos tendrán la misma densidad según este modelo.

3. Un oscilador en mi ascensor

En el techo de un ascensor que está bajando con aceleración a hay suspendidos un muelle de constante k y un péndulo de longitud L de cuyos extremos cuelga un cuerpo de masa m. Explica razonadamente cuánto valen los períodos de oscilación del muelle y del péndulo. Explica qué sucede si se rompe el cable del ascensor.



4. El misterio de Betelgeuse

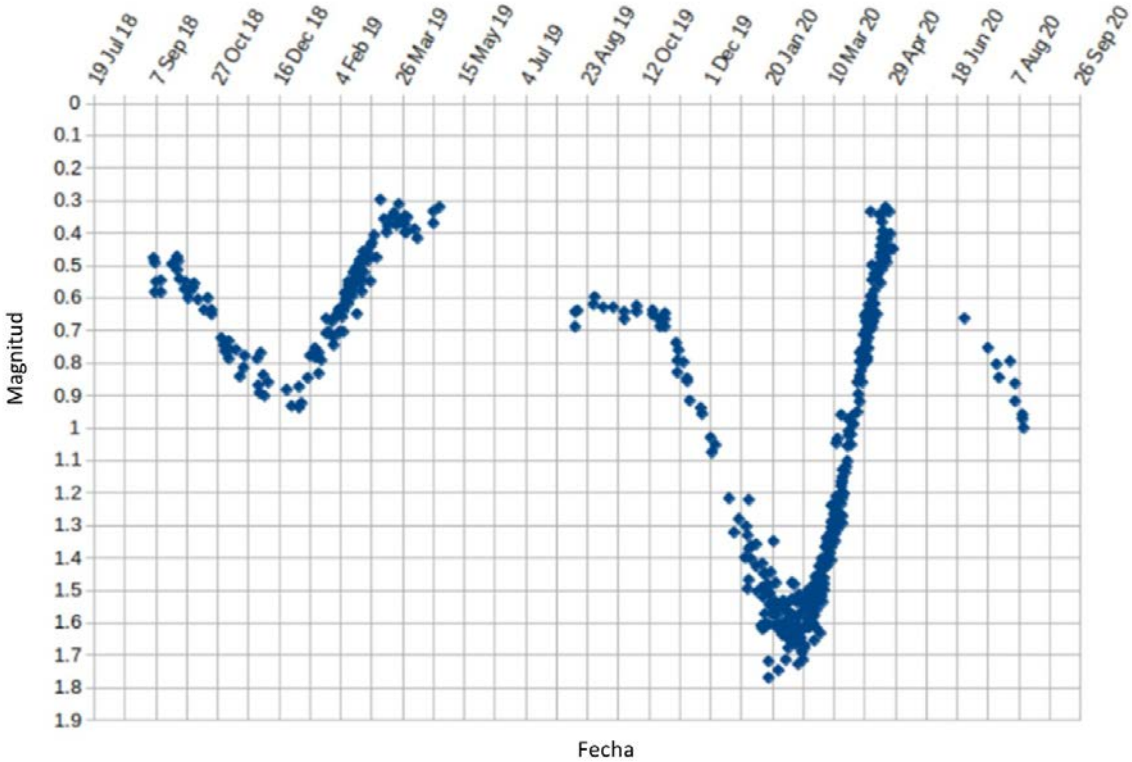
Betelgeuse es una de las estrellas más famosas del firmamento por constituir el "hombro" de la popular constelación de Orión. Es una estrella de las llamadas supergigantes rojas. Su brillo varía con cierta periodicidad, pero hace varios años sufrió durante un tiempo un oscurecimiento (disminución del brillo) muy extraño, más profundo de lo habitual, que creó las alarmas sobre su posible estallido inminente en forma de supernova.

El observable utilizado para caracterizar el brillo de una estrella visto desde la Tierra es la llamada *magnitud aparente* (m), que es adimensional, y se define como

$$m = -2{,}5\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I es la intensidad luminosa que detecta un telescopio situado en la Tierra (energía por unidad de superficie y tiempo) e I_0 es una intensidad de referencia que no necesitará conocer en este problema.

En la siguiente figura se representa la magnitud aparente, detectada en la Tierra, en función del tiempo para los días alrededor del oscurecimiento anómalo que, en vista de la gráfica, podemos asumir que empezó el 12 de octubre de 2019.



a) Teniendo en cuenta la distancia de Betelgeuse a la Tierra, ¿en qué año de nuestro calendario ocurrió realmente el oscurecimiento de la estrella?

Un modelo que se propuso inicialmente para explicar el oscurecimiento anómalo supone que la estrella se expandió rápidamente, y con ello se enfrió. Por otras medidas sabemos que la temperatura superficial al inicio de la expansión era $T_1 = 3500$ K y en el momento de máxima expansión era $T_2 = 2625$ K .

IMPORTANTE: Todo cuerpo caliente con una temperatura superficial T emite energía en forma de radiación electromagnética, la llamada *radiación de cuerpo negro*, que en el caso de una estrella es mayoritariamente luz visible. La potencia emitida P por unidad de área A de la superficie del cuerpo viene dada por la llamada **Ley de Stefan-Boltzmann**:

$$P / A = \sigma T^4$$

donde σ es una constante universal cuyo valor es $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ [S.I.]. Por otro lado, la longitud de onda $\lambda_{\max}$ para la cual la radiación de energía es máxima, satisface la llamada **Ley de Wien**:

$$\lambda_{\max} T = 2{,}9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

b) Determina las dimensiones de σ y sus unidades en el Sistema Internacional.

c) Usando la Ley de Stefan-Boltzmann determina la potencia emitida por la estrella en el momento de mayor brillo. (Exprésalo en *veces* la potencia del Sol).

d) Determina el radio R_2 en el momento de máxima expansión (mínimo brillo).

e) Calcula la velocidad media de expansión del radio de la estrella en el proceso de pasar de R_1 a R_2.

Otros astrofísicos propusieron que el oscurecimiento podría ser debido al tránsito de un planeta que orbita alrededor de Betelgeuse y bloquea parte de la luz de Betelgeuse cuando pasa por delante de ella. Este posible planeta tendría un período orbital muy grande, ya que el oscurecimiento observado es anómalo, nunca antes visto.

f) Estima la velocidad orbital del planeta. (AYUDA: obtén de la gráfica del brillo el tiempo que emplearía el planeta en cruzar diametralmente el disco que subtiende Betelgeuse). Obtén también el radio orbital del planeta. En vista del resultado, ¿es razonable este modelo?

g) Supongamos que en el momento de máximo oscurecimiento el disco del planeta, visto desde la Tierra, quedaba dentro del disco de Betelgeuse de forma que eclipsaba, de todo el disco radiante de Betelgeuse, un área circular del tamaño del disco del planeta. Determina el radio del planeta a partir de los datos de magnitud aparente de la gráfica.

(El modelo del fenómeno del oscurecimiento anómalo más aceptado a día de hoy es que se produjo una explosión en la superficie de Betelgeuse que expulsó gas que se hizo opaco al enfriarse, bloqueando así parte de la luz de la estrella.)

Debido al fenómeno de difracción de la luz, la imagen de cualquier objeto puntual captada por un telescopio no es un punto sino una mancha circular cuyo tamaño angular en radianes viene dado por la expresión

$$\theta_{\min} \simeq \frac{1{,}22\lambda}{D}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz y D el diámetro de la abertura circular del telescopio. Al ángulo $\theta_{\min}$ se le llama *resolución angular* de un telescopio y es la mínima separación angular entre dos puntos para que puedan verse distintos. Dos puntos separados un ángulo menor que $\theta_{\min}$ se verán a través del telescopio como un mismo objeto (es decir, no podrán resolverse), ya que se superpondrán las manchas imagen de los dos puntos.

h) Determina la mínima abertura, D, que debería tener un telescopio para poder resolver espacialmente Betelgeuse, es decir, para poder distinguir detalles en el disco de Betelgeuse. (AYUDA: utiliza la ley de Wien para obtener la longitud de onda de la luz y ten en cuenta la distancia de la Tierra a Betelgeuse para calcular anchuras angulares).

i) Si estando de excursión en el monte observamos Betelgeuse a simple vista en una noche estrellada, ¿cuántos fotones provenientes de Betelgeuse entran cada segundo en un ojo, suponiendo que el diámetro de la pupila del ojo de noche es de 5 mm?

En el punto central de una estrella la presión gravitatoria viene dada por

$$p_0 = \int_0^R \frac{G\,m(r)\rho(r)}{r^2}dr$$

donde $m(r)$ es la masa encerrada en un radio r, $\rho(r)$ es la densidad y R es el radio de la estrella.

j) Suponiendo que la densidad sea constante en el interior de la estrella, obtén la presión gravitatoria en el centro de Betelgeuse. (AYUDA: expresa primero el resultado en función de G, M y R, siendo M la masa total de la estrella, y calcula después el valor numérico).

DATOS PARA TODO EL PROBLEMA

Masa de Betelgeuse: $M_B = 2{,}1\times10^{31}$ kg

Radio de Betelgeuse al inicio del oscurecimiento: $R_1 = 6{,}2\times10^{11}$ m

Distancia de Betelgeuse a la Tierra: 665 años-luz

Constante de la gravitación universal: $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$

Constante de Planck: $h = 6{,}63\times10^{-34}\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$

Potencia emitida por el Sol: $P_\odot = 3{,}83\times10^{26}$ W

5. Potencia de un coche

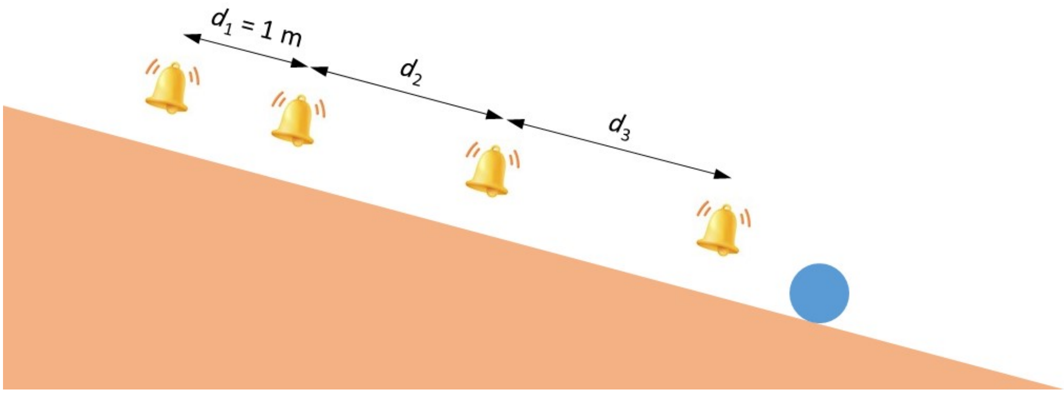
Un coche de 1200 kg de masa circula a velocidad constante de 100 km/h. Calcula la potencia, en caballos (CV), que desarrolla el motor en los siguientes casos:

a) La carretera es horizontal y no hay rozamiento entre las ruedas y el asfalto.
b) La carretera es horizontal y el coeficiente de rozamiento ruedas-asfalto es $\mu = 0{,}05$.
c) El coche sube por una cuesta de $10°$ de inclinación, sin rozamiento.
d) El coche sube por una cuesta de $10°$ de inclinación, y con rozamiento $\mu = 0{,}05$.

Dato: 1 CV = 0,75 kW

6. Campanas de Galileo

En el experimento del plano inclinado Galileo coloca una serie de campanitas en distintas posiciones de tal manera que, cuando el cuerpo cae por el plano, las campanas suenan a intervalos iguales de tiempo. Si la separación entre las dos primeras campanas es de 1 m, ¿cuánto valen las separaciones d_2 y d_3? (Suponemos que no existe fricción en el plano).



7. Balanza hidrostática

La figura muestra una balanza hidrostática. De los extremos de la barra cuelgan dos cuerpos de igual masa ($m_1 = m_2$), a la misma distancia del punto de apoyo ($L_1 = L_2$), de forma que la balanza está en equilibrio. La densidad del cuerpo de la derecha es cuatro veces la densidad del agua y el doble que la densidad del cuerpo de la izquierda, es decir, $\rho_2 = 2\rho_1 = 4\rho_a$. Si sumergimos toda la balanza en agua la barra se desequilibra. ¿A qué distancia L_2 hay que colgar el cuerpo de la derecha para reestablecer el equilibrio? (Expresa L_2 en función de L_1).