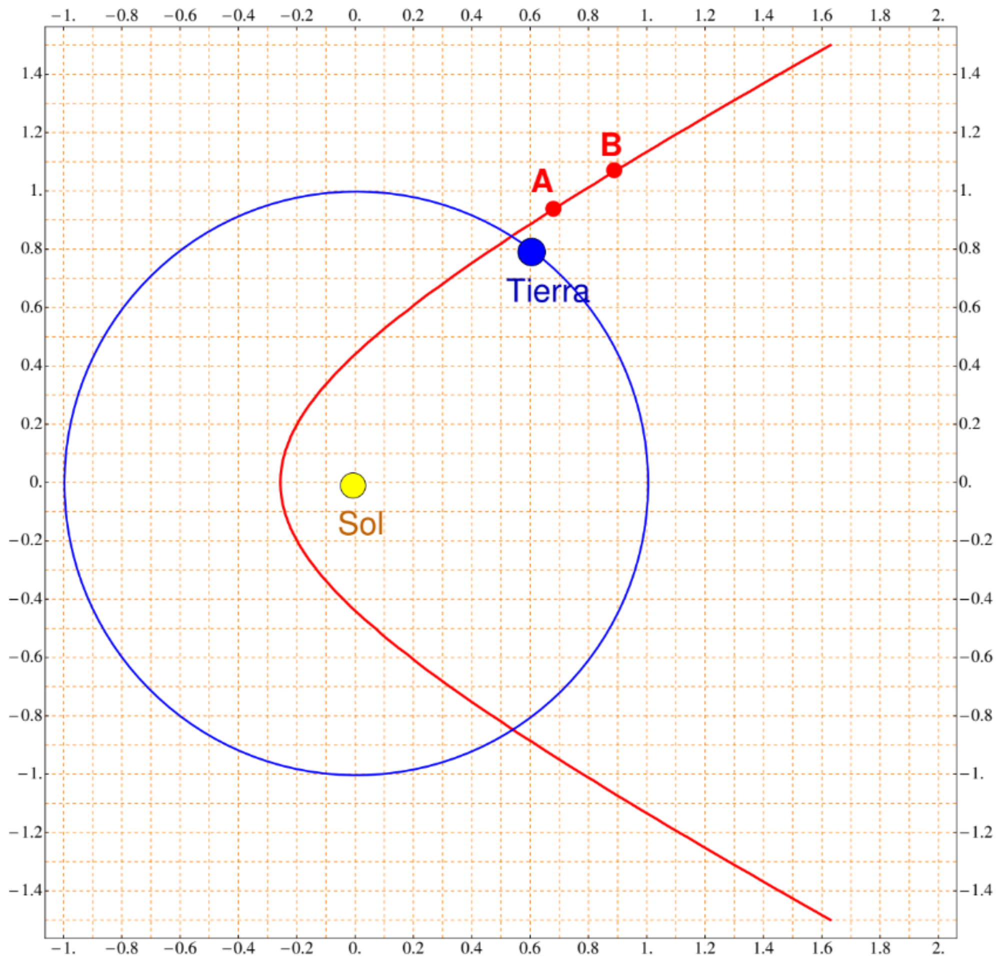
1. El asteroide interestelar Oumuamua

En octubre de 2017 se descubrió el que se cree que es el primer objeto detectado que pasa por el Sistema Solar pero que proviene de fuera de él. Se piensa que es un asteroide y se le llamó Oumuamua, que significa "primer mensajero lejano" en idioma hawaiano. Se estimó que seguía una trayectoria hiperbólica, cuya parte más cercana al Sol se muestra en rojo en la figura 1. (En realidad la hipérbola no está en el mismo plano que la órbita de la Tierra, pero supondremos que sí por simplicidad). Las distancias en la figura están en unidades astronómicas, UA (1 UA = distancia Tierra-Sol = $150 \cdot 10^6$ km). La primera vez que se observó fue el 19 de octubre y el asteroide estaba en el punto A, y el 28 de octubre estaba en el punto B. Consideraremos en este problema que la única influencia gravitatoria relevante es la del Sol.

a1) Determina la expresión de la velocidad del asteroide, $v(r)$, en función de la distancia al Sol, r, la distancia al Sol el primer día que se observó, r_A, y la velocidad cuando se observó, v_A. (Ayuda: Utilizar la conservación de la energía mecánica).

Figura 1



a2) Realizando las mediciones sobre la figura 1 que consideres oportuno, calcula los valores de r_A y de v_A (en km/s). (Considerar que entre A y B el movimiento es aproximadamente uniforme).

Obtén la velocidad, v_p, en el perihelio (punto de la trayectoria más cercano al Sol).

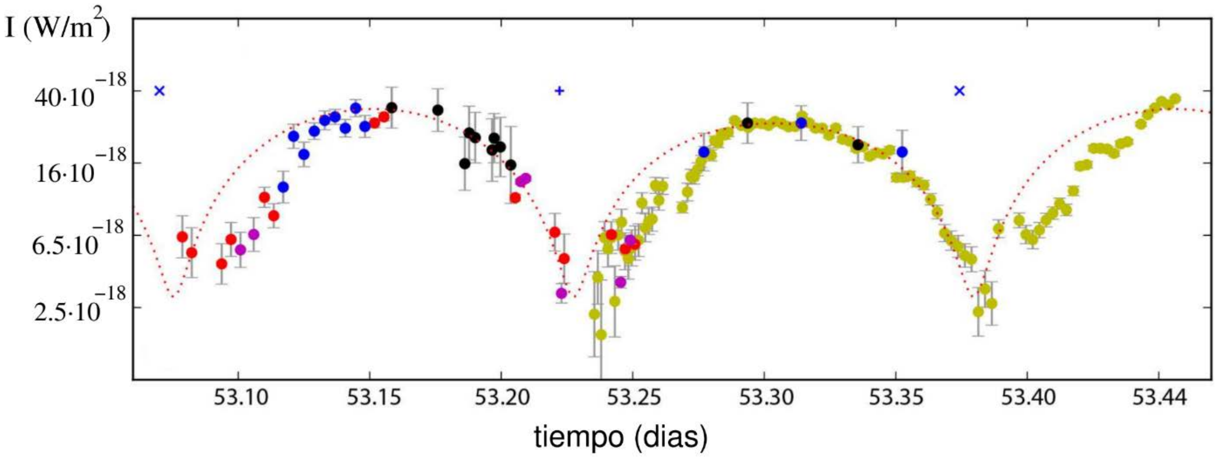
¿Cuánto vale la velocidad en el límite muy lejos del Sol, v_∞? ¿Es la energía mecánica total de Oumuamua positiva o negativa? En vista del resultado numérico obtenido, razona por qué se cree que Oumuamua viene de fuera del Sistema Solar.

Datos: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ [S.I.], $M_{Sol} = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

b) Teniendo en cuenta la constancia de la velocidad areolar para una fuerza central y midiendo las áreas que consideres oportuno en la figura 1, estima en qué fecha pasó el asteroide por el perihelio. (Recordar que la velocidad areolar es el área barrida en la unidad de tiempo por el vector de posición que va desde el Sol hasta el asteroide.)

Consideremos que Oumuamua refleja aproximadamente un 10% de la intensidad luminosa que le llega del Sol (que es un valor típico para un asteroide). En la figura 2 se muestra la intensidad luminosa con que se detectó en la Tierra la luz proveniente de Oumuamua en función del tiempo (en días, respecto de un origen arbitrario). Supongamos también que el asteroide es homogéneo.

Figura 2



c1) En vista de la figura 2 razona por qué se piensa que Oumuamua debe tener una forma muy alargada y está rotando. Obtén el periodo de rotación (en horas) a partir de la gráfica.

Aproximemos la forma de Oumuamua por un cilindro de longitud L y diámetro de la base D, que rota en el plano de la visual con la Tierra.

c2) Estima el cociente L / D.

Si la observación de la figura se realizó cuando Oumuamua estaba en el punto B:

c3) ¿Qué intensidad luminosa llegaba del Sol a Oumuamua en el punto B?

Dato: Potencia luminosa emitida por el Sol, $P_{Sol} = 3.9 \cdot 10^{26}$ W.

c4) El asteroide refleja la luz de forma *difusa,* es decir, la emite en todas direcciones dentro de una semiesfera encarada al Sol, y la Tierra también está encarada en la misma dirección (en muy buena aproximación). Demuestra que el área máxima que presenta Oumuamua (la del rectángulo proyección lateral del cilindro) viene dada por

$$A = \frac{8\pi^2 I_0 r_B^2 d^2}{\eta P_{Sol}}$$

donde I_0 es la máxima intensidad detectada en la figura 2, d es la distancia de la Tierra al punto B, r_B la distancia del punto B al Sol y η la fracción de luz en intensidad que refleja el asteroide (η = 0.1).

Determina, a partir del valor numérico de A, el valor de la longitud L y el diámetro D.

d) Consideremos ahora a Oumuamua lejos de la influencia del Sol. Vamos a estimar cuanto se frenará por la interacción con las partículas que hay en el medio interestelar. Esencialmente el medio interestelar está compuesto por átomos de hidrógeno con una densidad numérica promedio de n = 1 átomo por cm^3. Suponiendo que el asteroide presenta un área efectiva promedio en la dirección de avance, A, y que las partículas que barre se incorporan a la masa del asteroide, demuestra que sufre una aceleración dada por

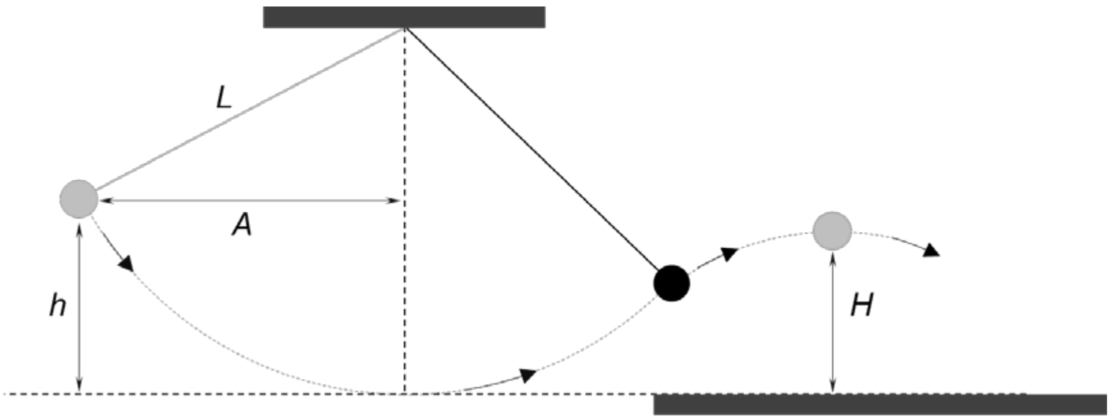
$$a = \frac{-m_p}{m} n A v^2$$

donde m_p es la masa del protón, m la masa de Oumuamua y v su velocidad. Estima su valor numérico suponiendo que el asteroide tiene la misma densidad que la Tierra.

Datos: densidad de la Tierra= 5.5 g/cm^3, m_p = 1.67·10^{-27} kg.

P2. Pendulaciones

Construimos un péndulo atando una esferita de masa *m* y radio despreciable al extremo de un hilo inextensible de longitud *L* y masa despreciable. El otro extremo del hilo está sujeto a un punto fijo del techo. Tomamos el punto más bajo del péndulo como referencia para medir alturas. Dicho punto está a ras del tablero de una mesa situada a la derecha del péndulo. Llamamos eje X al horizontal y eje Y al vertical.



Separamos la esfera una distancia *A* desde la vertical (manteniendo el hilo estirado) hasta situarla a una altura *h*.

a) Obtén la distancia *A* en función de *L* y *h*.

Soltamos la esfera y el péndulo empieza a oscilar.

b) Obtén la expresión de la tensión *T* del hilo (en función de *m*, *g*, *L* y *h*) cuando la esfera está en el punto más alto y cuando está en el punto más bajo.

c) Obtén la velocidad $v_{\max}$ en el punto más bajo.

d) Supón que la cuerda se rompe justo cuando la esfera está en el punto más alto. Explica qué le ocurre a la esfera.

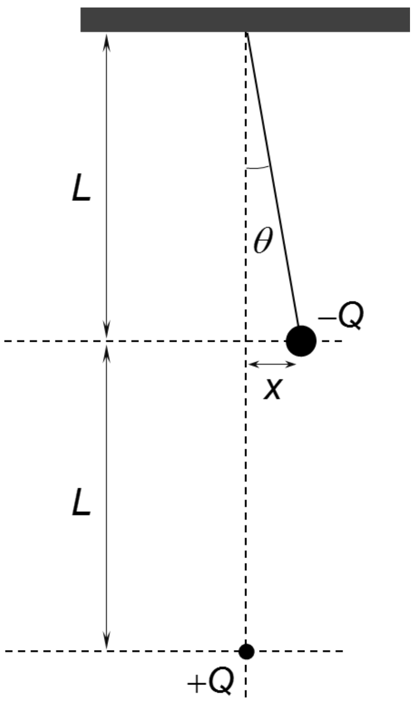
e) Supón ahora que la cuerda se rompe, pero justo cuando el hilo forma un ángulo de 45º con la vertical. Obtén la altura máxima *H* que alcanzará la esfera.

f) Si el calor específico de la esfera es c_e, obtén el incremento de temperatura ΔT que experimentará la esfera cuando caiga sobre la mesa, suponiendo que toda su energía se transforma en calor y que la mesa no absorbe ningún calor.

Si la distancia *A* es pequeña (oscilaciones pequeñas) podemos considerar que la oscilación ocurre en el eje X.

g) Indica cuál es el período de oscilación y escribe la expresión $x(t)$ de las oscilaciones.

Cargamos la esfera con una carga negativa –Q, y situamos una carga fija de igual valor y signo opuesto (+Q) a una distancia 2L del techo en la vertical que pasa por el enganche del péndulo (ver figura).



h) Escribe la expresión del módulo de la fuerza electrostática que actúa sobre la esfera del péndulo, cuando está a distancia x de la vertical.

Sigue considerando oscilaciones pequeñas en el eje X. Utiliza la aproximación

$$\sin\theta \approx x / L \, .$$

i) Teniendo en cuenta la influencia de la carga, obtén una nueva expresión para el período del péndulo (en función de m, g, L, Q y la constante de Coulomb K). Si no logras deducirla, propón de forma justificada una posible expresión que tenga sentido físico.