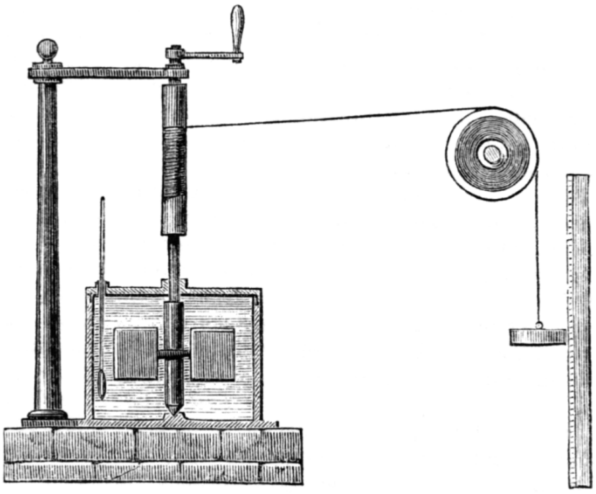
1ª PARTE (duración: 1 h 45 min)

1. Para entrar en calor

Una caloría es la cantidad de calor necesaria para elevar 1 grado centígrado la temperatura de 1 gramo de agua.

En el experimento de Joule se utiliza un recipiente aislado térmicamente que contiene una cierta cantidad de agua. Con un termómetro se mide la temperatura del agua. Dentro del recipiente hay unas paletas que se ponen en movimiento a través de un eje por la acción de una pesa que cae desde una altura *h*. Si la masa de la pesa es de 1 kg, calcula la altura que debe descender para producir 1 caloría.

(Calor específico del agua = 4,186 J/g ºC)

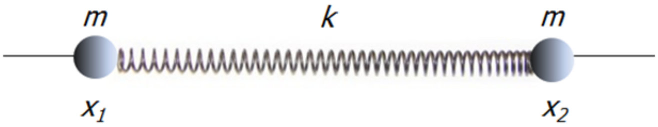


2. Muelle

Dos objetos pequeños de igual masa m se mueven en una única dirección (eje X) conectados por un muelle de constante k y distancia de equilibrio d. Las fuerzas que el muelle produce sobre ellos son:

$$F_1 = k(x-d)$$
$$F_2 = -k(x-d)$$

donde $x \equiv x_2 - x_1$



Sabemos que si sujetamos el primer objeto y estiramos inicialmente el muelle, el segundo objeto oscila con un periodo de 1 s. ¿Con qué periodo, T, oscilaría un objeto respecto al otro si no hubiera sujeción? (Considera la aceleración relativa $a = a_2 - a_1$).

3. ¿Cómo escapar del planeta Gruyer?

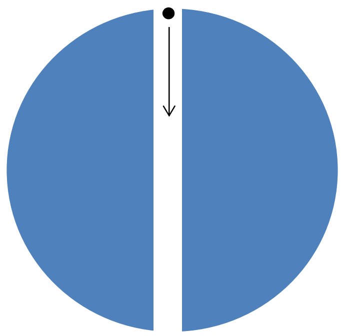
Has sido capturado/a por alienígenas que te han llevado a un planeta desconocido, llamado Gruyer (como el queso[1]), que tiene la particularidad de estar agujerado por gran cantidad de túneles que lo atraviesan limpia y diametralmente. Te dejan deambular libremente junto a un vigilante y notas que te mueves por la superficie de Gruyer con total facilidad, sintiéndote algo más ligero/a que en la Tierra (la atmósfera debe ser similar y la gravedad quizás un poco menor). El vigilante, que es buena persona (buen alienígena) está dispuesto a facilitarte todos los materiales que le pidas (bolitas, hilo, cronómetro, cinta métrica...). Así, te puedes entretener con tu afición favorita: hacer experiencias y cálculos de física.

a) Para empezar, con una pequeña bolita e hilo construyes un péndulo de longitud 149 cm. Cronometras cuidadosamente el periodo de sus pequeñas oscilaciones, concluyendo que es de 2,5 s.

a1) Con esos datos, determina la gravedad g_0 en la superficie de Gruyer.

a2) ¿Cuál sería el período del péndulo dentro de un túnel justo en el centro del planeta?

b) Te preguntas qué ocurriría si dejaras caer una bolita por uno de esos túneles que atraviesan al planeta a lo largo de un diámetro. Como buen científico/a te pones a pensar en cuestiones teóricas, y te percatas de que necesitas saber cómo varía la gravedad a medida que la bolita va cayendo por el túnel. Demuestra que la gravedad en el interior de un planeta, de masa *M* y radio *R*, viene dada por la expresión



$$g = \frac{GM}{R^3} r$$

siendo $r \leq R$ la distancia al centro del planeta, y G = 6,67·10^{-11} N·m^2/kg^2 la constante de Gravitación Universal.

c) Ya te era conocido cómo varía la gravedad conforme nos alejamos de la superficie de un planeta hacia afuera. Ahora también sabes cómo varía al ir desde la superficie hacia el centro. Para visualizar estas variaciones, representa el valor de *g* en función de *r* en una sola gráfica que incluya los dos tramos $r \leq R$ y $r \geq R$.

d) Armado/a con conocimiento teórico sobre la gravedad en el interior de los túneles de Gruyer, ya puedes predecir cómo va ser el movimiento de una bolita que dejarás caer por uno de ellos. Para hacerlo:

d1) Expresa la fuerza que actuaría dentro del túnel sobre una bolita de masa *m*, suponiendo despreciable el rozamiento con el aire y con las paredes del túnel.

d2) De acuerdo con esa fuerza, justifica que la bolita (dejada caer por el túnel partiendo desde la superficie de Gruyer) realizaría un movimiento armónico simple de amplitud igual al radio *R* del planeta. (Se dará por válida tanto una demostración matemática como alguna argumentación correcta).

e) Demuestra que el periodo del MAS que realizaría la bolita en el túnel viene expresado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

---

[1] La variedad francesa del queso de Gruyère (o Gruyer) posee los característicos agujeros. Curiosamente la rama original de Suiza, con la denominación de origen, es de textura lisa y uniforme.

f) Con tu teoría bien afianzada, te decides por fin a dejar caer una bolita por el agujero de un túnel esperando que, de acuerdo a tus predicciones, la bolita regrese tras su viaje a las antípodas del planeta. Cronometras el tiempo desde que la soltaste y compruebas, tras 1 hora, 41 minutos y 37 segundos de paciente espera, que la bolita llega de nuevo a tu mano. Ahora ya tienes datos suficientes para poder calcular, tanto el radio R, como la masa M del planeta Gruyer. ¿Cuánto valen?

g) Te asalta la curiosidad científica de saber la enorme velocidad que ha debido alcanzar la bolita para ir a las antípodas y volver en menos de dos horas. Expresa la velocidad en función de la posición en el túnel (adapta la expresión para introducir la posición en km y obtener la velocidad en km/h). ¿Qué velocidad llevará cuando pasa por el centro del planeta?

h) Con la masa y el radio de Gruyer, obtenidos en el apartado f, puedes calcular la densidad media de ese planeta. No obstante, la densidad de su materia debe ser mayor, dada la gran cantidad de túneles vacíos que lo atraviesan. Te informan de unos datos (muy aquilatados por los gruyeros, pues viven con la peligrosidad de los agujeros): por término medio en Gruyer hay un agujero por cada 100 m^2 de su superficie y cada agujero es circular de 4 m de diámetro (los túneles pueden considerarse cilindros que atraviesan el planeta diametralmente de lado a lado). Ciertamente es un planeta con una peligrosa profusión de grandes agujeros. Con estos datos, tras calcular la densidad media del planeta en su conjunto, podrás calcular también la densidad media del material constitutivo de Gruyer. Compara ambas densidades con la densidad media de la Tierra (5,5 gr/cm^3).

i) Te informan de que un inquietante meteorito, de considerable masa, ha sido atrapado en una órbita elíptica por el campo gravitatorio de Gruyer, estando el centro del planeta en un foco de la elipse. Pides más datos al observatorio astronómico y te dicen que ahora mismo el meteorito se encuentra en el apoastro de la órbita (punto más alejado de Gruyer) a distancia d_A = 95000 km del centro de Gruyer y moviéndose con velocidad v_A = 879 m/s. Rápidamente te pones a hacer cálculos y obtienes que la distancia al periastro (punto de la elipse más próximo al centro de Gruyer) es d_P = 5002 km.

i1) Explica por qué llegas a la fatal conclusión de que el meteorito impactará con el planeta. (Se recomienda apoyarse en un dibujo). Ayuda: el radio de Gruyer no es despreciable respecto a las dimensiones de la órbita.

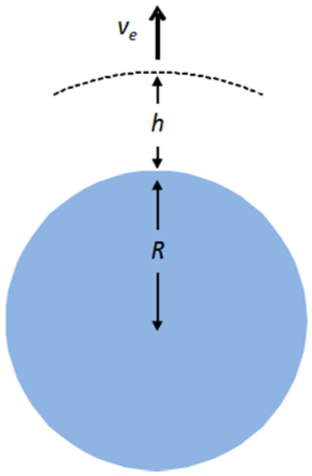
i2) Reproduce el cálculo de d_P = 5002 km. Ayuda: en la órbita elíptica se conserva tanto el momento angular como la energía total del meteorito.

i3) ¿Con qué velocidad aproximada impactará el meteorito contra Gruyer?

j) Tras tus cálculos y fatal conclusión, los gruyeros, ansiosos, te preguntan: "¿Cuánto tiempo disponemos (aproximadamente) antes del impacto?" Intenta responderles. Ayuda: utiliza la 3ª ley de Kepler con el radio medio de la órbita.

k) Los habitantes de Gruyer, ante inminente catástrofe, transformaron la famosa frase *"de perdidos... al río"*, en esta otra: *"de perdidos... al espacio"*, y te pidieron consejo para poder escapar del planeta y llegar al espacio exterior en naves. Lógicamente, lo primero que te preguntas es ¿cuál es la velocidad de escape, v_e, desde la superficie de Gruyer?

I) Pero sabes que alcanzar la velocidad de escape en la superficie es imposible de forma instantánea. Desde la superficie de Gruyer habrá que propulsar una nave verticalmente, mediante una fuerza resultante constante (el piloto ajustará la fuerza ejercida por el motor para que, al restar el peso, resulte siempre la misma fuerza constante), de forma que al ir subiendo y acelerando llegue a cierta altura h (desde la superficie), donde la velocidad alcanzada sea precisamente la velocidad de escape correspondiente a dicha altura. A partir de ese instante se apagará el motor de la nave, ésta seguirá alejándose indefinidamente y los habitantes de Gruyer tendrán alguna posibilidad de sobrevivir vagando por el espacio.



I1) Da la expresión de la velocidad de escape desde un punto situado a una altura h.

I2) Interesa alcanzar la velocidad de escape lo antes posible para ahorrar combustible, pero por prudencia, estamos limitados por la máxima aceleración que puede soportar un gruyero, que es de $8g_0$ (siendo g_0 la gravedad en la superficie de Gruyer obtenida en a1). Los pilotos de las naves adaptan los motores para que la fuerza resultante produzca dicha aceleración máxima soportable. Obtén, en función de R, la altura h a la que se alcanzará la velocidad de escape. Ayuda: iguala la velocidad de escape (la correspondiente al punto a altura h) y la velocidad alcanzada a una altura h dado el movimiento acelerado de ascenso.

I3) Calcula el valor numérico de la altura h, el de la velocidad de escape a esa altura, y el tiempo que se tarda en alcanzarla.

NOTA FINAL: Tras un largo vagar por el espacio, el azar (o la Providencia, según las creencias de cada cual) hizo que las naves divisaran un pequeño planeta azul, con condiciones de habitabilidad (gravedad, atmósfera, etc.) similares a Gruyer, algo más pequeño que éste, pero sin agujeros. ¡Era la Tierra!, donde los gruyeros fueron acogidos para un fructífero intercambio de conocimientos; y tú, que has sido realizador/a y protagonista de este problema, pudiste por fin abrazar a tu familia.

4. Dúo ondulatorio

a) La intensidad de la radiación solar recibida en la Tierra vale 1366 W/m^2. Calcula la potencia radiada por el Sol sabiendo que se encuentra a $150 \cdot 10^6$ km de la Tierra.

b) Una cuerda vibrante (por ejemplo de violín) emite una nota de frecuencia f_0. Vamos acortando la cuerda a la mitad, a la 3ª parte, a la 4ª parte… de su longitud. Expresa (justificadamente) la frecuencia f que emite la cuerda, en función de f_0, cuando la acortamos hasta la *n*ª parte de su longitud inicial.

5. Trío electromagnético

a) ¿De qué variables depende el campo magnético que crea un solenoide en su interior?

b) Sean dos placas separadas una distancia d y sometidas a una diferencia de potencial ΔV. Soltamos, partiendo del reposo, una partícula de masa m y carga q desde una de las placas. Obtén la expresión para la velocidad de la partícula cuando llega a la otra placa.

c) Explica brevemente en qué condiciones la fuerza de Lorentz puede producir un movimiento circular. (Haz un dibujo si lo crees conveniente).

6. Tiro con arco

El tiro con arco es una modalidad olímpica desde el año 1900. En este deporte hay que alcanzar una diana con una flecha propulsada con un arco. Consideremos en primer lugar el modelo llamado "arco medieval", que consiste en un listón de madera curvado y rígido a cuyos extremos hay enlazada una cuerda elástica. Al cargar la flecha el arquero estira la cuerda de manera que su tensión aumenta (suponemos que el listón de madera prácticamente no se deforma). La tensión, T, de la cuerda es proporcional a la longitud total, L, que tiene la cuerda en un instante dado ($T = k\,L$). La longitud de la cuerda relajada (sin estirar) es d. Llamamos estiramiento, x, a la separación de la cuerda, medida a lo largo del eje de la flecha, desde su posición relajada. (Ver Figura 1).

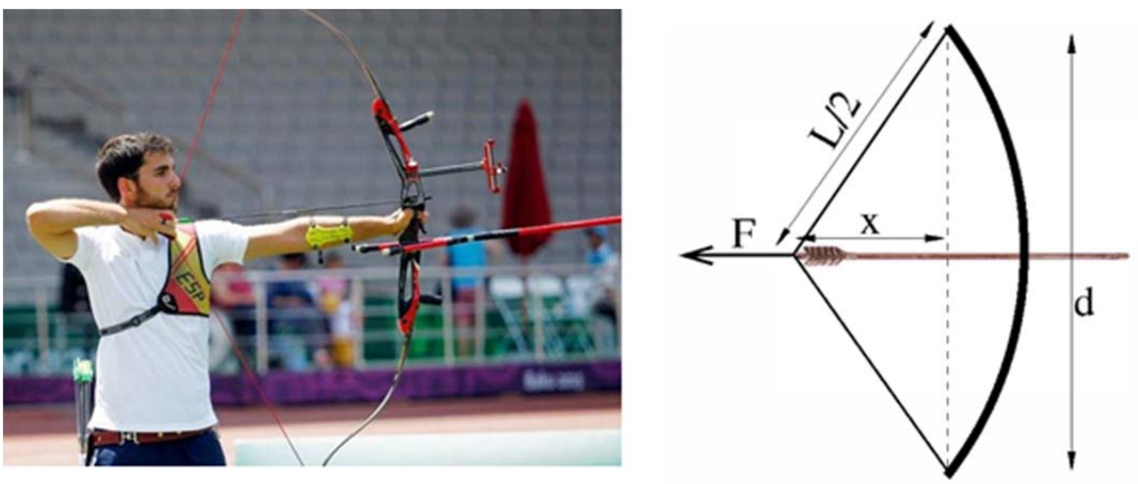


Figura 1

Datos: tensión de la cuerda relajada: T_0 = 200 N; d = 1 m; masa de la flecha: m =20 g.

a) Obtén el valor de la constante k.

b) Estudiemos la fuerza que debe ejercer el arquero.

b1) Demuestra que dicha fuerza, en función del estiramiento, es

$$F(x) = 4kx$$

b2) Representa gráficamente $F(x)$ desde la posición relajada hasta $x = d/2$.

c) Calcula la energía acumulada en el arco (o trabajo realizado por el arquero) para un estiramiento A = 50 cm.

d) Llamemos Δt al tiempo transcurrido desde el instante en que el arquero suelta la cuerda con un estiramiento A hasta el momento en que la flecha, de masa m, deja de estar en contacto con la cuerda. Obtén:

d1) La velocidad con que la flecha es lanzada, en función de T_0, A, d y m.

d2) El tiempo Δt en función de T_0, d y m.

d3) El valor numérico de Δt y la velocidad para los datos del problema y A = 50 cm.

Un arco olímpico es una variante del arco medieval en que una parte del arco también es flexible, de modo que el arquero debe hacer menos esfuerzo (aunque no es relevante para este problema entender el porqué). En lo sucesivo nos referiremos a este tipo de arco.

e) La velocidad promedio de la flecha se puede determinar experimentalmente mediante el siguiente método. Cada parte del proceso de disparo emite un sonido característico debido a la diferente vibración de los elementos involucrados (arco, flecha, diana, etc.). Para registrar los sonidos producidos por dichas vibraciones, se colocan dos micrófonos a distancias de 3 m y 20 m, respectivamente, por detrás del punto de disparo. Los micrófonos empiezan a grabar a la vez. En la Figura 2 se representan los sonidos registrados por los micrófonos en función del tiempo cuando la diana se coloca a una distancia de 18 m del arco. El punto 1 indica el instante en que el arquero suelta la cuerda, el punto 2 representa el instante en que la flecha abandona la cuerda y el punto 3 el instante en que la flecha impacta con la diana.

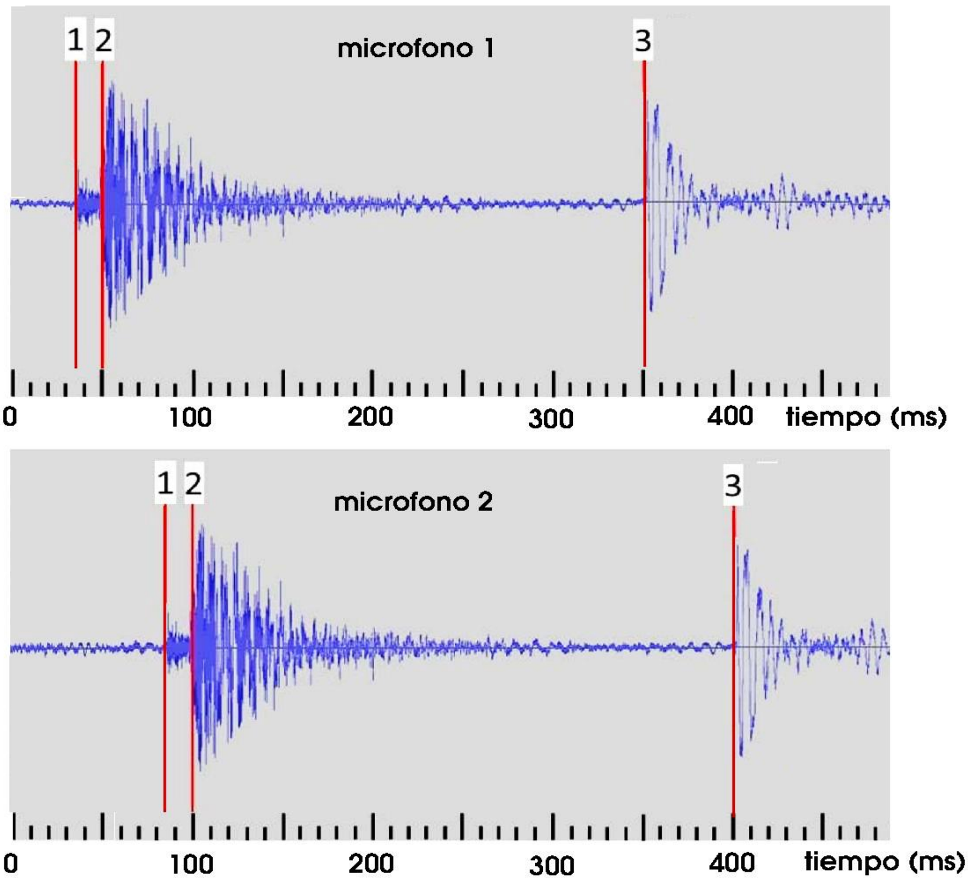


Figura 2

Utilizando la información de las figuras, determina:

e1) La velocidad del sonido en el aire.

e2) El tiempo de vuelo de la flecha (tiempo que tarda desde que abandona el arco hasta que impacta con la diana). Ayuda: ten en cuenta que los sonidos tardan un tiempo en llegar hasta el micrófono desde que son emitidos.

e3) La velocidad media de la flecha durante el tiempo de vuelo. (Suponemos que la flecha sigue una trayectoria horizontal).

f) En realidad la flecha sufre un rozamiento con el aire que le hace disminuir su velocidad. Este efecto se puede describir de forma aproximada con la siguiente expresión para la velocidad media en función de la distancia *z* entre el arco y la diana:

$$\bar{v}(z) = \bar{v}(0)\left(1 - \frac{\sigma z}{2}\right)$$

donde σ es un coeficiente que tiene en cuenta el rozamiento. La Figura 3 representa el valor de $\bar{v}(z)$ medido con el montaje explicado antes. Determina el valor de σ a partir de la figura.

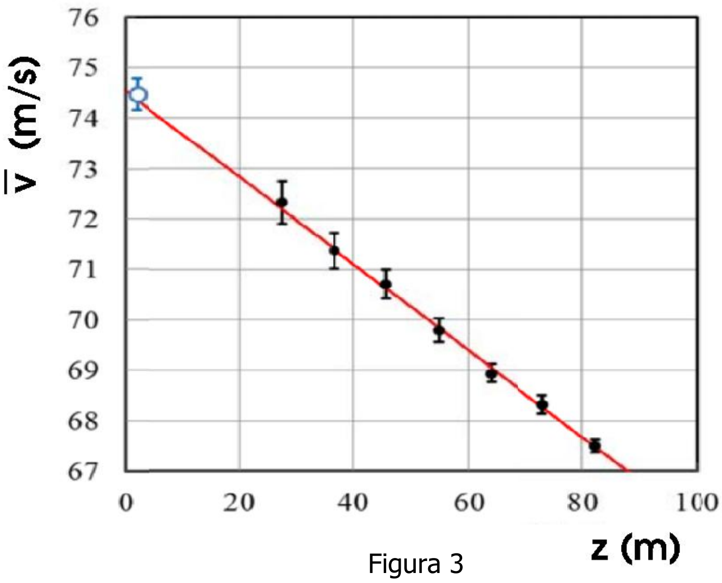


Figura 3

g) Como se ha dicho antes, un arco olímpico está diseñado para ayudar al arquero de tal modo que la fuerza, *F*, que ha de hacer en función del estiramiento, *x*, no es lineal, sino que viene dada por la curva de la Figura 4.

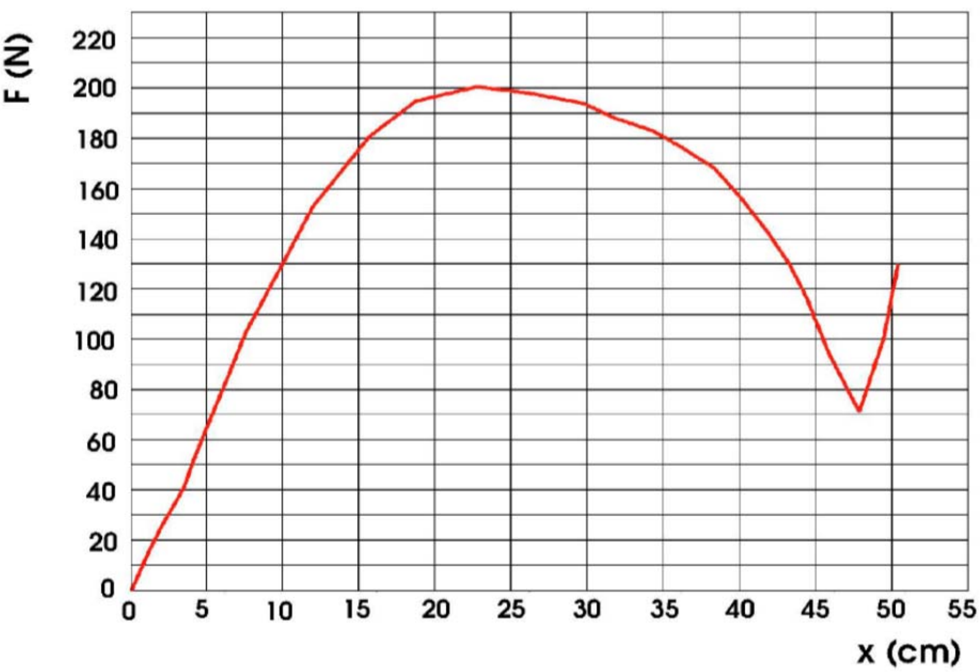


Figura 4

g1) Estimar el trabajo realizado por el arquero si estira la cuerda hasta *x* = 50 cm. Ayuda: calcular numéricamente el área debajo de la curva aproximando el área mediante pequeños rectángulos o fracción.

g2) ¿Con qué velocidad debería salir la flecha si todo el trabajo calculado en el apartado anterior se transmitiera a la flecha? Compáralo con el valor que se deduce de la Figura 3 y razona una posible causa de la discrepancia.

h) Consideremos que la flecha sale del arco con un ángulo β respecto de la horizontal y que el centro de la diana está a la misma altura que el punto de salida de la flecha.

h1) Determinar la distancia vertical h desde el punto de impacto al centro de la diana, en función de la distancia de la diana al arco, z, la velocidad inicial, v_0, el ángulo β y la aceleración de la gravedad, g. (No considerar el rozamiento con el aire).

En la Figura 5 se representa el valor de h cuando la diana está a z = 100 m del arco, en función del ángulo β y para distintos valores del estiramiento del arco, x, y teniendo en cuenta además el rozamiento del aire.

h2) Si la diana tiene un diámetro de 1 m, y el estiramiento es de 48 cm con un error de ±2 cm, ¿cuál es el valor del ángulo y su error para que la flecha acierte en la diana?

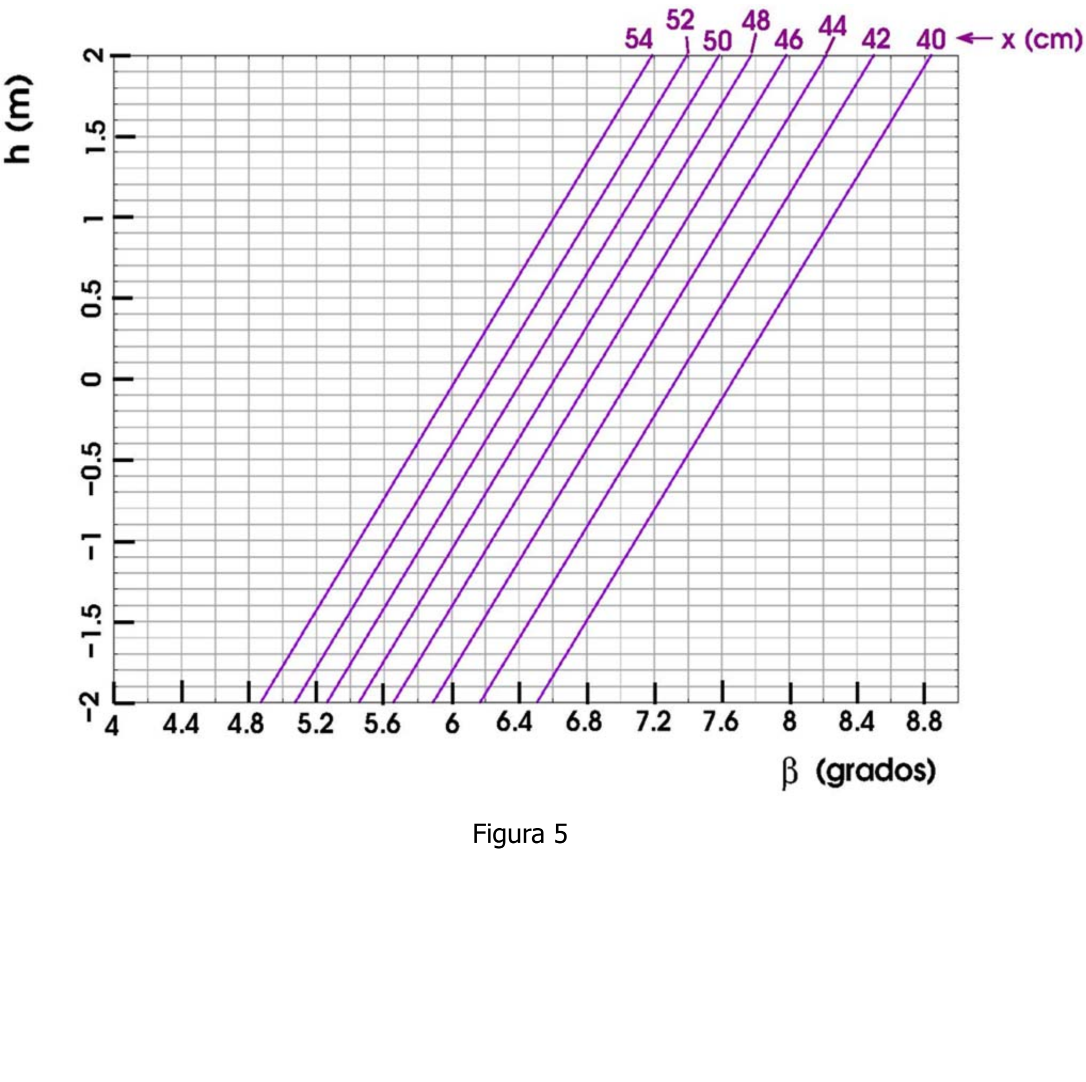


Figura 5