CAPÍTULO 2

Radiación electromagnética

2.1. ENUNCIADOS Y SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

1. El campo eléctrico de una onda electromagnética plana en el vacío viene dado, en unidades del sistema internacional (SI), por $E_x = 0$, $E_y = 5\cos\left[6\times 10^{13}(t - x/c)\right]$ y $E_z = 0$. Indique cuál es la dirección de propagación y el plano de polarización de la onda y calcule su frecuencia, su longitud de onda y su intensidad media.

   Solución:

   $$\boxed{\text{La dirección de propagación es: x}}\ \boxed{\text{Plano de polarización: xy}}$$
   $$\boxed{\text{La frecuencia:}\,\nu = 9{,}5\cdot 10^{12}\,Hz\ \text{(Infrarrojo)}}\ \boxed{\text{La longitud de onda:}\lambda = 3{,}16\cdot 10^{4}\,nm}$$
   $$\boxed{\text{Intensidad media } I = 0{,}033\frac{w}{m^2}}$$

2. El campo eléctrico de una onda electromagnética plana viene dado por $\mathbf{E} = E_{0x}\cos(\omega t - kz)\mathbf{i} + E_{0y}\cos(\omega t - kz)\mathbf{j}$. Determine el plano de polarización de la onda, el campo magnético que lleva asociado, el vector de Poynting y la intensidad.

   Solución:

   $$\boxed{\text{Plano de polarización de la onda: } \alpha = atan\left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)}$$
   $$\boxed{\text{Campo magnético asociado: } B_x = -\frac{E_{0y}}{c}cos(\omega t - kz)\ \text{ y }\ B_y = -\frac{E_{0x}}{c}cos(\omega t - kz)}$$
   $$\boxed{\text{Vector de Poynting: } \mathbf{S} = c\varepsilon_0 E_0^2 cos^2(\omega t - kz)\mathbf{k}}$$
   $$\boxed{\text{Intensidad: } I = \langle S\rangle = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{c\varepsilon_0(E_{0x}^2 + E_{oy}^2)}{2}}$$

3. El campo eléctrico de una onda electromagnética plana viene dado por $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\mathbf{i} + E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kz)\mathbf{j}$. Estudie la polarización de la onda y determine el campo magnético asociado, el vector de Poynting y la intensidad.

   Solución:

   $$\boxed{\text{La polarización es } \textbf{circular}}$$

   $$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Campo magnético asociado:} & \mathbf{B} = B_{0x} sen(\omega t - kz)\mathbf{i} + B_{0y} cos(\omega t - kz)\mathbf{j} \\ & B_{0y} = \frac{E_{0y}}{c} = \frac{E_0}{c} \text{ y } B_{0x} = -\frac{E_{0y}}{c} = -\frac{E_0}{c} \end{array}}$$

   $$\boxed{\text{Vector de Poynting: } \mathbf{S} = c\varepsilon_0 E_0^2 \mathbf{k}}$$

   $$\boxed{\text{Intensidad: } I = \langle S \rangle = c\varepsilon_0 E_0^2}$$

4. Demuestre que el valor medio temporal de la función $\cos^2(\omega t - kz)$ vale 1/2.

   Solución: $\boxed{\left\langle cos^2(\omega t - kz)\right\rangle = \frac{1}{2}, \text{ para } T \gg \tau}$

5. La intensidad mínima de luz que puede percibir el ojo humano es aproximadamente 10^{-10} W/m^2. ¿Cuántos fotones con longitud de onda de 5600 Å entran por segundo en la pupila del ojo a esta intensidad? El área de la pupila es aproximadamente 0.5 cm^2.

   Solución: $\boxed{\Phi = 14085{,}9 \frac{fotones}{s}}$

6. Calcule la densidad de fotones que lleva un haz de radiación monocromática de intensidad 6 W/m^2, cuya longitud de onda es: a) 100 m; b) 1 cm; c) 10000 nm; d) 5000 Å ; e) 100 Å ; f) 1 Å y g) 0.01 Å . ¿A qué regiones del espectro pertenecen estas ondas?

   Solución:

λ	Región espectral	$u_f \frac{fotones}{m^3}$
100 m	Ondas de radio	10^{19}
1cm = 10^{-2}m	Microondas	10^{15}
10^{-4}nm = 10^{-5}m	Infrarroja	10^{12}
$5000\mathring{A} = 5 \cdot 10^{-7}$m	Visible	$5 \cdot 10^{10}$
$100\mathring{A} = 10^{-8}$m	Ultravioleta	10^9
$1\mathring{A} = 10^{-10}$m	Rayos X	10^7
$0{,}01\mathring{A} = 10^{-12}$m	Rayos gamma	10^5

7. Se demuestra que un dipolo eléctrico que oscila con una frecuencia ω emite ondas electromagnéticas esféricas a su alrededor, cuyo campo eléctrico viene dado por

   $$E = \frac{d_0 \operatorname{sen}\theta\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \operatorname{sen}(\omega t - kr)$$

   donde d_0 es la amplitud del dipolo. Calcule la intensidad promedio de la radiación y la potencia emitida.

   Solución: $\boxed{I = \frac{d_0^2 sen^2\theta\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 r^2 c^3}}$ $\boxed{P = \frac{d_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}}$

8. La luz del Sol llega a la Tierra con una intensidad media de 1370 W/m^2. Esta intensidad es la denominada constante solar. Calcule la presión de radiación sobre un panel de células solares totalmente absorbente. Si la longitud de onda promedio es de 7000 Å, calcule el flujo fotónico que llega al panel.

   Solución: $\boxed{P = 4{,}6 \cdot 10^{-6} \frac{N}{m^2}}$ $\boxed{\Phi = 4{,}8 \cdot 10^{21} \frac{fotones}{s\, m^2}}$

9. Un haz de rayos X atraviesa un material que contiene electrones libres. Según la teoría clásica de la radiación electromagnética, el haz dispersado tiene la misma longitud de onda que el haz incidente y su intensidad varia con el ángulo de dispersión. Arthur H. Compton explicó este efecto en 1923 asumiendo que la radiación electromagnética se comporta de forma corpuscular. Deduzca la expresión $\lambda' - \lambda = (1 - \cos\theta)h/(m_e c)$, que relaciona la longitud de onda del haz dispersado, λ', con la del haz incidente, λ, interpretando el proceso como una colisión (relativista) entre un fotón y un electrón libre inicialmente en reposo.

   Solución: $\boxed{\lambda' - \lambda = (1 - \cos\theta)h/(m_e c)}$

10. Se observa la dispersión por electrones libres de los siguientes haces de radiación electromagnética a 90° del haz incidente: a) rayos ultravioleta con $\lambda = 100$ Å; b) rayos x con $\lambda =$ 1 Å y c) rayos gamma con $\lambda = 0.01$ Å. Calcule en cada caso el porcentaje en el que aumenta la longitud de onda y el porcentaje de energía que pierde el fotón incidente.

    Solución:

caso	Haz incidente	$\Delta\lambda(\%)$	$\Delta E_{\text{fotón}}(\%)$
a	$\lambda = 100\,\mathring{A}$ (Ultravioleta)	0.02426	-0.024
b	$\lambda = 1\,\mathring{A}$ (Rayos X)	2.426	-2.37
c	$\lambda = 0{,}01\,\mathring{A}$ (Rayos gamma)	242.6	-70.8

11. Demuestre que la intensidad de la radiación de un cuerpo negro está relacionada con la densidad de energía mediante la expresión $E(\nu, T) = (c/4)u(\nu, T)$.

    Solución: $\boxed{E(\nu, T) = (c/4)u(\nu, T)}$

12. Demuestre que la ley de radiación de Planck del cuerpo negro coincide con las leyes de Wien y de Rayleigh-Jeans en los límites de altas y bajas frecuencias, respectivamente.

    Solución:

Ley	Condición	Expresión
Ley de Planck		$u_P(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$
Ley de Rayleigh-Jeans	$h\nu \ll k_B T$	$u_{RJ}(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} k_B T$
Ley de Wien	$h\nu \gg k_B T$	$u_W(\nu, T) = A\nu^3 e^{\frac{-\beta\nu}{T}}$, con $A = \frac{8\pi h}{c^3}$ y $\beta = \frac{h}{k_B}$

13. Deduzca la ley de Stefan-Boltzmann a partir de la fórmula de Planck para la densidad espectral de un cuerpo negro.

    Solución: $\boxed{I(T) = \sigma T^4}$

14. Exprese la densidad de energía espectral de la radiación del cuerpo negro en función de la longitud de onda.

    Solución: $\boxed{u(\lambda) \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left[e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right]}}$

15. Deduzca la ley de desplazamiento de Wien a partir de la fórmula de Planck para la densidad espectral de un cuerpo negro expresada en función de la longitud de onda.

Solución: $\boxed{\lambda_{max} T = 2{,}899 \cdot 10^{-3} mK}$

16. Calcule la longitud de onda máxima a la que emiten los siguientes sistemas, considerados como cuerpos negros, e indique a qué zona del espectro electromagnético pertenece dicha radiación: a) una explosión termonuclear (10^7 K); b) la estrella polar (8300 K); (c) el Sol (5700 K); (d) un cuerpo a temperatura ambiente (25°) y (d) el espacio interestelar (2.7 K) desde donde se emite la radiación de fondo del Universo.

Solución:

Sistema	T(K)	λ_{max}	R. Espectral
Explosión termonluclear	10^7	$2{,}89 \cdot 10^{-10}\, m\ = 0{,}285\, nm$	Rayos X
Estrella Polar	8300	$3{,}5 \cdot 10^{-7}\, m\ = 350\, nm$	Ultravioleta
Sol	5700	$5 \cdot 10^{-7}\, m\ = 500\, nm$	Visible
Temperatura ambiente	298	$9{,}7 \cdot 10^{-6}\, m\ = 9700\, nm$	Infrarrojo
Espacio interestelar	2,7	$1 \cdot 10^{-3}\, m\ = 1\, mm$	Microondas

17. El Sol emite energía radiante con una potencia de $3.9{\times}10^{26}$ W. Calcule la intensidad de la radiación sobre la superficie solar, la temperatura a la que se encuentra la superficie, suponiendo que el Sol se comporta como un cuerpo negro, y la intensidad de la radiación que llega a la Tierra, es decir la constante solar. El radio del Sol vale $7{\times}10^8$ m y la distancia a la Tierra es de $1.5{\times}10^{11}$ m.

Solución: $\boxed{I_{solar} = 6{,}3 \cdot 10^7 \frac{w}{m^2}}$ $\boxed{T_{solar} = 5774K}$ $\boxed{I_{Tierra} = 1372 \frac{N}{m^2}}$

18. Suponga que la Tierra emite radiación como un cuerpo negro y que esta radiación se encuentra en equilibrio con la que recibe del Sol, de la que refleja un 30 %. Calcule la temperatura media de la Tierra.

Solución: $\boxed{T = 255K = -18°C}$

19. Una pequeña nave espacial se encuentra a 9.3×10^9 m del Sol. En un momento dado despliega una vela solar completamente reflectora de 100 m^2 de superficie, sobre la que inciden perpendicularmente los rayos del Sol. Calcule el tiempo que tarda la nave en cruzar la órbita de la Tierra, impulsada únicamente por el viento solar. Compruebe que la aceleración gravitacional con la que el Sol atrae a la nave no es despreciable. La nave pesa 200 Kg, la masa de Sol es 2×10^{30} Kg, su radio vale 7×10^8 m, la intensidad de la radiación en la superficie solar es de 6.3×10^7 W/m^2, la distancia media a la órbita de la Tierra vale 1.5×10^{11} m y la constante de la gravedad es 6.67×10^{-11} Nm^2Kg^{-2}.

Solución:

$$\boxed{\text{Intensidad en el punto en que se encuentra la nave: } I = 3\cdot 10^5\,\frac{w}{m^2}}$$

$$\boxed{\text{Presión de la radiación sobre la vela: } P = 2\cdot 10^{-3}\,\frac{N}{m^2}}$$

$$\boxed{\text{Fuerza sobre la vela: } F = 0{,}2N}$$

$$\boxed{\text{Aceleración debida al viento solar: } a = 1\cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s^2}}$$

$$\boxed{\text{Distancia recorrida hasta la órbita de la Tierra: } d = 1{,}4\cdot 10^{11}m}$$

$$\boxed{\text{Tiempo empleado en recorre esa distancia: } t = 193 \text{ días}}$$

$$\boxed{\text{Aceleración con que el Sol atrae a la nave: } a = 1{,}33\frac{m}{s^2}}$$

20. La línea de emisión del hidrógeno que tiene una longitud de onda de 1216 Å se observa en el espectro de cierta galaxia a 1315 Å. Calcule la velocidad a la que se mueve la galaxia de nosotros usando tanto la expresión exacta que proporciona la variación de la frecuencia por efecto Doppler, como la expresión aproximada para el caso en el que $v/c << 1$.

Solución:

$$\boxed{\text{Expresión exacta: } \frac{v}{c} = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2}{1+\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2} \implies v = 2{,}35\cdot 10^7\,\frac{m}{s}}$$

$$\boxed{\text{Expresión aproximada: } \frac{v}{c} = 1-\frac{\lambda}{\lambda'} \implies v = 2{,}26\cdot 10^7\,\frac{m}{s}}$$